Γ-сходимость и компактная концентрация в задачах Дирихле для оператора Лапласа

Краткое содержание курса

Прочитано в Лаборатории Чебышёва (Санкт-Петербург) в феврале-марте 2016 г.

Основная цель курса – теорема Bucur'а о компактной концентрации задач Дирихле для оператора Лапласа с нулевым краевым условием. Для этого требуются некоторые пререквизиты.

1. Γ-сходимость. Пусть X – топологическое пространство, F_n, $n = 1, 2, \dots$, и F – функционалы на X со значениями в $\bar{\mathbb{R}}$. Рассматриваются вариационные задачи $F_n(x) \to \min$, $F(x) \to \min$, $x \in X$; функционалы F_n понимаются как возмущения функционала F. Не предполагается *никакой* гладкости функционалов и возмущений.

Де Джорджи предложил в некоторых случаях говорить, что F_n Γ-*сходится* к F. Определение можно упростить, если X удовлетворяет первой аксиоме счётности. Получающимся секвенциальным определением можно пользоваться и в случае слабых топологий на банаховых пространствах, если функционалы F_n удовлетворяют некоторым дополнительным условиям (предложение 8.10 из Dal Maso, "An introduction to Γ-convergence").

Верхние и нижние Γ-пределы всегда полунепрерывны снизу (LSC). Поэтому общую теорию Γ-пределов можно строить только на множествах LSC-функционалов.

Если $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$, а G_n сходится к G *непрерывно*, то $F_n + G_n \xrightarrow{\Gamma} F + G$. В частности, если $G \in C(X)$, то $F_n + G \xrightarrow{\Gamma} F + G$.

Следующее ключевое свойство Γ-сходимости делает её применимой к вопросам вариационного исчисления. Пусть X – метрическое пространство. Если $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$, семейство $\{F_n\}$ *эквикоэрцитивно* и каждый из функционалов F_n, F имеет ровно один минимум, то $\arg\min F_n \xrightarrow{X} \arg\min F$.

Кроме того, в произвольном топологическом пространстве X верно следующее: если $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$, $x_n \in X$ – какой-то минимайзер для F_n и $x_n \xrightarrow{X} x \in X$, то x – минимайзер функционала F.

Имеют место частичные обращения аддитивного свойства Γ-сходимости и теорем о сходимости минимайзеров (пункт "Теоремы о достаточном числе возмущений" в курсе). Эти результаты показывают, что Γ-сходимость – это, грубо говоря, самая слабая сходимость, выдерживающая прибавление непрерывного возмущения и гарантирующая сходимость $\arg\min$'ов функционалов.

2. Γ-компактность. Интегральные функционалы. Γ-сходимость оказывается настолько слаба, что разные классы функционалов оказываются Γ-секвенциально компактны; это относится, например, к классу вообще всех функционалов на сепарабельном метрическом пространстве. Однако для реальных приложений это утверждение слишком абстрактно.

Более конкретное утверждение таково: Γ-секвенциально компактным будет класс функционалов вида $F(u) := \int_\Omega f(x, \nabla u(x))\, dx$ на $W^{1,p}(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченное открытое множество, а интегранд подчинён условию

$$c_0|\xi|^p \leq f(x,\xi) \leq c_1|\xi|^p, \quad 0 < c_0 \leq c_1. \tag{1}$$

Здесь Г-компактность следует понимать в смысле сужения L^p-сильной топологии на $W^{1,p}$ или в смысле слабой $W^{1,p}$-топологии. Постоянные c_0 и c_1 не должны зависеть от F.

Теоремы о Г-секвенциальной компактности семейств таких интегральных функционалов позволяет находить Г-пределы, тестируя предельный интегранд подходящим (довольно скудным) классом функций u. Так можно сделать в задаче гомогенизации эллиптических операторов (см. коллоквиум); в курсе эта схема применена к исследованию задач Дирихле в перфорированных областях (см. ниже).

Несложная срезочная процедура позволяет добавить условие Дирихле $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ ($\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$) к функционалам указанного выше вида. Именно, если $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$, то $F_n(u) + \chi_{\{u-\varphi\in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)\}}(u) \xrightarrow{\Gamma} F(u) + \chi_{\{u-\varphi\in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)\}}(u)$. (Всюду далее $\chi_E(x)$ равно нулю при $x \in E$ и $+\infty$ при $x \notin E$.)

В "реальных" приложениях Г-сходимость может быть использована двумя способами. Пусть $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$ и есть эквикоэрцитивность. Первый вариант применения таков: пусть нас интересуют минимайзеры $\arg\min F_n$, но они вычисляются плохо при $n = 1, 2, \ldots$; может оказаться, что тем не менее $\arg\min F$ считается хорошо. Г-сходимость позволяет приблизительно указать $\arg\min F_n$, написав оценку $\arg\min F_n \approx \arg\min F$. Так будет, например, в задачах гомогенизации.

Другой способ применить Г-сходимость возникает, когда нас интересует $\arg\min F$, но он плохо вычисляется. В этом случае надо Г-приблизить функционал F функционалами F_n, для которых $\arg\min F_n$ считается хорошо, и снова написать оценку $\arg\min F_n \approx \arg\min F$. Так можно сделать, например, с "нелапласным" функционалом изопериметрической задачи, Г-приблизив его эллиптическими функционалами задач фазового перехода. То же самое относится и к функционалу Mumford'а–Shah'а, используемому для повышения резкости изображений в графических редакторах. В обоих примерах константа c_0 из (1) обращается в ноль: допредельные функционалы эллиптичны, но не равномерно по n.

Интересный пример гомогенизации – гомогенизация римановых метрик (см. Braides, "Г-convergence for beginners"). Римановы метрики понимаются как функции расстояний, то есть минимума длин кривых, соединяющих две заданные точки. Поэтому применима Г-сходимость. Оказывается, что предел осциллирующих римановых метрик может оказаться *финслеровой* метрикой.

3. Ёмкости. Теория потенциала. Тонкие свойства функций. Пространству $H^1(\mathbb{R}^N) = W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, оснащённому нормой $\|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}$, соответствует классическая ёмкость Cap. Соболевские функции правильно определять с точностью до ёмкости 0, то есть *квазивсюду*: для каждой $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ существует единственная функция $\bar{u}$, равная u почти всюду и *квазинепрерывная*. Такие квазинепрерывные функции также называют *уточнёнными*. Все соболевские функции далее считаем уточнёнными.

Для соболевских функций имеют место ёмкостные уточнения теорем Рисса-Егорова[-Северини] о поточечной сходимости: здесь речь идёт о сходимости квазивсюду или о равномерной сходимости на дополнении множества сколь угодно малой ёмкости. (Иной подход к уточнению этих теорем разработал Фугледе, введя в рассмотрение семейства мер, исключительных в смысле экстремальной длины.) Теорема Лебега о точках Лебега функции также допускает ёмкостное уточнение.

В связи с теорией ёмкости вводятся классы *квазиоткрытых* и *тонко* (*fine*) *открытых* множеств. Определения оказываются эквивалентными с точностью до нулевой ёмкости. Применения тонко открытых и квазиоткрытых множеств, однако, различны.

Множества надуровня квазинепрерывной (в частности, любой уточнённой соболевской) функции квазиоткрыты.

Тонко открытые множества, в отличие от квазиоткрытых, образуют топологию (*тонкая топология Картана*). Любая квазинепрерывная функция тонко непрерывна в квазивсех точках.

Теорема Картана о тонко отрытых множествах описывает такие множества через разреженность их дополнений. Разреженность множества в точке, в свою очередь, может быть охарактеризована с помощью критерия Винера. Хорошо известно, что это условие отвечает за непрерывность решений задач Дирихле для оператора Лапласа; граничные данные должны быть непрерывны, а решение строится с помощью барьеров.

Другая теорема Картана – ёмкостный аналог теоремы Лебега о точках Лебега *множества*: для любого $E \subset \mathbb{R}^N$ множество $\{x \in E \colon E$ разрежено в $x\}$ имеет нулевую ёмкость.

Одно из приложений теории ёмкости – теорема аппроксимации, увязывающая различные определения пространства $H_0^1(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – *произвольное* открытое множество:

$$\operatorname{clos}_{H^1(\mathbb{R}^N)} C_0^\infty(\Omega) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \colon u = 0 \text{ квазивсюду в } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}.$$

4. Ёмкостные меры. Релаксированные задачи Дирихле в ограниченном боксе. Сходимости задач Дирихле в переменной области проще изучать в случае, когда все области ограничены в совокупности: мы легко можем пользоваться неравенством Пуанкаре и теоремой Реллиха. В случае, когда области не ограничены в совокупности, применяется локализация. Такая теория была развита в работах Dal Maso, Mosco'87 и Dal Maso, Murat'97.

Через $\mathcal{M}_0$ обозначим семейство неотрицательных борелевских мер в $\mathbb{R}^N$, исчезающих на множествах ёмкости 0. Если $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ – уточнённая, то корректно определён интеграл $\int_{\mathbb{R}^N} u^2\,d\mu \in [0, +\infty]$.

Для ограниченного открытого $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ и $\mu \in \mathcal{M}_0$ положим

$$F_\mu(u, \Omega) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^2\,d\mu + \chi_{H_0^1(\Omega)}(u), \quad u \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Будем говорить, что последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}_0$ γ-сходится к мере $\mu \in \mathcal{M}_0$, если $F_{\mu_n}(\cdot, \Omega)$ Γ-сходится к $F_\mu(\cdot, \Omega)$ в $L^2(\Omega)$-сильной топологии (или в $L^2(\Omega)$-слабой, или в $H^1(\Omega)$-слабой топологии) для произвольного ограниченного открытого $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Если $\mu_n \xrightarrow{\gamma} \mu$, то, по аддитивным свойствам Γ-сходимости и по теореме о сходимости минимайзеров, для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ и для любого ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ имеем

$$\arg\min \left[F_{\mu_n}(u, \Omega) - 2 \int\limits_\Omega f u\,dx \right] \xrightarrow{n \to \infty} \arg\min \left[F_\mu(u, \Omega) - 2 \int\limits_\Omega f u\,dx \right]. \tag{2}$$

Правую часть последнего предельного соотношения называют *слабым вариационным решением* уравнения

$$\begin{cases} (-\Delta + \mu) u = f \text{ в } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3}$$

Автоматически имеем $u \in L^2(\mu)$, и u исчезает вне *регулярного множества* меры μ. Для решений систем (3) верны принцип максимума и уравнение Эйлера (в котором в качестве пробных функций берутся функции класса $H_0^1(\Omega) \cap L^2(\mu)$).

Пусть $E \subset \mathbb{R}^N$. Определим меру $\infty_E \in \mathcal{M}_0$ равенством

$$\infty_E(B) := \begin{cases} 0, & \operatorname{Cap}(B \cap E) = 0; \\ +\infty, & \operatorname{Cap}(B \cap E) > 0; \end{cases}$$

для борелевского $B \subset \mathbb{R}^N$. Если $A \subset \mathbb{R}^N$ – открытое, то условие $u \in L^2(\infty_{\mathbb{R}^N \setminus A})$ для $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ означает, что $u \in H_0^1(A)$. Это позволяет ставить нулевое краевое условие Дирихле на ∂A.

Dal Maso и Mosco получили два существенных результата о классе ёмкостных мер:

- класс $\mathcal{M}_0$ γ-секвенциально компактен;
- для любой $\mu \in \mathcal{M}_0$ найдётся такая последовательность открытых множеств $A_n \subset \mathbb{R}^N$, что $\infty_{\mathbb{R}^N \setminus A_n} \xrightarrow{\gamma} \mu$ (в этом случае будем говорить, что последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ γ-сходится к мере μ).

Иными словами, класс задач для операторов вида $-\Delta + \mu$ получается замыканием класса задач для оператора $-\Delta$ в различных областях A_n относительно γ- или Γ-сходимости (во всех задачах ставится нулевое краевое условие Дирихле).

Проиллюстрируем этот эффект. На плоскости $\mathbb{R}^2$ найдётся последовательность открытых множеств $A_n \subset B_{\mathbb{R}^2}(0,1)$, а также – постоянная $C \in (0, +\infty)$, для которых при любой $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ решения задач Дирихле

$$\begin{cases} -\Delta u_n = f \text{ в } A_n; \\ \quad u_n = 0 \text{ вне } A_n \end{cases}$$

сходятся $H^1(B_{\mathbb{R}^2}(0,1))$-слабо (а потому и $L^2(B_{\mathbb{R}^2}(0,1))$-сильно) к решению задачи

$$\begin{cases} (-\Delta + C)u = f \text{ в } B_{\mathbb{R}^2}(0,1); \\ \qquad u = 0 \text{ вне } B_{\mathbb{R}^2}(0,1). \end{cases}$$

Для этого достаточно взять *перфорированные области*

$$A_n := B_{\mathbb{R}^2}(0,1) \setminus \bigcup_{j,k \in \mathbb{Z}} B_{\mathbb{R}^2}\left((j/n, k/n), \exp(-n^2)\right).$$

Радиус e^{-n^2} в этом построении подбирается из ёмкостных соображений. Доказательство в целом проведено в курсе.

5. Резольвенты единицы. Оказывается, что за сходимость задач вида (3) отвечает сходимость решений этих задач при $f \equiv 1$. Результаты в этом направлении были получены Dal Maso и Murat'ом, а после – улучшены Bucur'ом.

Dal Maso и Murat доказали, что в *ограниченном* множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ мера μ восстанавливается однозначно по функции $w_{\mu,\Omega}$, для которой

$$\begin{cases} (-\Delta + \mu) w_{\mu,\Omega} = 1 \text{ в } \Omega; \\ \qquad\quad w_{\mu,\Omega} \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Для этого они придали точный смысл равенству $\mu = \dfrac{1 + \Delta w_{\mu,\Omega}}{w_{\mu,\Omega}}$. Результат Dal Maso и Murat'а устанавливает биекцию между классом ёмкостных мер в Ω и классом функций $w \in H_0^1(\Omega)$, для которых $1 + \Delta w \geq 0$ в смысле распределений.

Эта теорема позволяет заключить, что $\{w_{\mu,\Omega} > 0\}$ квазивсюду совпадает с регулярным множеством меры μ (*строгий принцип максимума*).

Также Dal Maso и Murat доказали, что в ограниченном боксе $\mu_n \xrightarrow{\gamma} \mu$ если и только если $w_{\mu_n,\Omega} \xrightarrow{L^2} w_{\mu,\Omega}$. Пусть $R_{\mu,\Omega}$ – резольвента оператора $-\Delta + \mu$ с нулевым краевым условием на $\partial\Omega$, рассматриваемая как оператор из L^2 в L^2. Результат Dal Maso и Murat'а вкупе с соотношением (2), таким образом, показывает, что для сильной поточечной сходимости операторов $R_{\mu_n,\Omega}$ достаточна L^2-сходимость функций $R_{\mu_n,\Omega}(1)$. Bucur, однако, усилил это, отбросив условие ограниченности множеств и доказав *равномерную* сходимость резольвент (для множеств, а не для произвольных мер).

6. Компактная концентрация. Пусть $A_n \subset \mathbb{R}^N$ – открытые множества, $\sup\limits_n |A_n| < +\infty$. Если $\mu \in \mathcal{M}_0$, а регулярное множество меры μ имеет конечный объём, то через R_μ обозначим резольвенту оператора $-\Delta + \mu$ (рассматриваемую как оператор из L^2 в L^2). Далее, $R_{A_n} := R_{\infty_{\mathbb{R}^N \setminus A_n}}$. Положим $w_{A_n} = R_{A_n}(1)$.

Первая теорема Bucur'а относится к случаю, когда функции w_{A_n} сходятся L^2-сильно к некоторой функции $w \in L^2(\mathbb{R}^N)$, а множества A_n γ-сходятся к некоторой мере $\mu \in \mathcal{M}_0$. В этом случае:

- вложение (нелинейного) множества $\bigcup\limits_n H_0^1(A_n)$ в $L^2(\mathbb{R}^N)$ компактно;
- $R_{A_n} \xrightarrow[\|\cdot\|_{L^2\to L^2}]{} R_\mu$.

Доказательство использует "разлокализацию" определения γ-сходимости.

Вторая теорема Bucur'а утверждает, что для любой последовательности открытых (или квазиоткрытых) множеств $A_n \subset \mathbb{R}^N$ с точностью до подпоследовательности верно одно из двух:

- (Компактная концентрация) Найдутся векторы $y_n \in \mathbb{R}^N$, для которых последовательность $w_{y_n+A_n}$ сходится L^2-сильно; также $y_n + A_n$ γ-сходятся к некоторой мере μ. В этом случае справедливо утверждение первой теоремы Bucur'а.
- (Дихотомия) Найдутся квазиоткрытые множества $\tilde{A}_n$, для которых $\tilde{A}_n = A_n^{(1)} \sqcup A_n^{(2)}$, множества $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ квазиоткрыты, $\operatorname{dist}(A_n^{(1)}, A_n^{(2)}) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\varliminf\limits_n |A_n^{(1)}| > 0$, $\varliminf\limits_n |A_n^{(1)}| > 0$, $\|R_{A_n} - R_{\tilde{A}_n}\|_{L^2\to L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Доказательство этой теоремы получается применением к функциям w_{A_n} теоремы Лионса, в которой утверждается в целом аналогичная троичная альтернатива для последовательности функций, ограниченных в H^1.

В обеих теоремах Bucur'а – как и в работе Dal Maso и Murat'а – оказывается, что за сходимость множеств A_n (и за их резольвентные операторы) отвечает сходимость функций $w_{A_n} = R_{A_n}(1)$. Как правило, доказательства получаются интегрированием по частям, которое есть ни что иное как уравнение Эйлера для энергетических функционалов.

Для локализации множеств A_n в случае, когда они сходятся к $\varnothing$, используется теорема Lieb'а о сдвигах областей: для любых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^N$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $y \in \mathbb{R}^N$, что $\lambda_1(A \cap (y+B)) \leq \lambda_1(A) + \lambda_1(B) + \varepsilon$. Здесь $\lambda_1(A)$ – первое собственное число оператора $-\Delta$ в множестве A с нулевым краевым условием Дирихле.

Оглавление:

Определение

Пример № 1

Компактность некоторых классов; постановка условия Дирихле;

Теория потенциала

фазовый переход

Ёмкостные меры; Γ-сходимость

Пример перфорированных областей

Аддитивные свойства; сходимость минимайзеров

Relaxed Dirichlet problems

Бусиу: введение, Appendix

Бусиу: Th. 2.1, Proposition 3.3 (случай $w_{A_n} \xrightarrow[L^2]{} \cdot$)

Бусиу: Th 2.2 (остальные случаи)

Теоремы о достаточном числе возмущений

Extremal length & ...

Fuglede'57,'60 — другое уточнение Th Рисса-Егорова (экстремальные длины)

По абстрактной теории ёмкостей: Брело, "Основы классической теории потенциала"

Карлесон, "Избранные проблемы теории исключительных множеств"

Литература:

введение, Γ-сх-ть
- G. Dal Maso, "An introduction to Γ-convergence", ~~2002~~. 1993.
- A. Braides, "Γ-convergence for beginners", 2002.

– Γ-компактность M_0; количественные критерии Винера

Relaxed Dirichlet problems
- G. Dal Maso, U. Mosco, "Wiener criterion and Γ-convergence", 1987.

огр. оценки
- D.R. Adams, L.I. Hedberg, "Function spaces and potential theory", 1999.
- G. Dal Maso, F. Murat, "Asymptotic ~~correctors~~ behaviour and correctors for Dirichlet problems in perforated domains with homogeneous monotone operators", 1997. $w_\mu \Leftrightarrow \mu$, "Строим "пранции тех"
- D. Бусиу, "Uniform concentration-compactness for Sobolev spaces on variable domains", 2000. — Основная Th
- P.L. Lions, "The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case, part 1", 1984.
- О нер-ве Пуанкаре и Th Реллиха для A: $|A|<\infty$ — см. Мазья, "Пространства Соболева", 1985
- Braides, "Handbook on Γ-convergence", 2006.
- Lieb, "On the lowest eigenvalue of the Laplacian for intersection of two domains", 1983
- Бусиу, Butazzo, "Variational methods in shape optimization problems" (монография)

Определения:

X - топологическое пр-во. $F_n : X \to [-\infty, +\infty]$

$x \in X$. $\mathcal{N}(x)$ - окрестности x в X.

$$\Gamma\text{-}\overline{\lim_n} F_n(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \overline{\lim_n} \inf_{y \in U} F_n(y)$$

$$\Gamma\text{-}\underline{\lim_n} F_n(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \underline{\lim_n} \inf_{y \in U} F_n(y)$$

Если $\Gamma\text{-}\overline{\lim_n} F_n = \Gamma\text{-}\underline{\lim_n} F_n = F$, то $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$.

- - - - - - - - - - - - - -

Пусть $X \in$ I акс. счётности (счётная база в точке). [Секвенциальное def]

$\Gamma\text{-}\lim_n F_n(x) = a$, если: $\begin{cases} \forall x_n \to x \quad \underline{\lim_n} F_n(x_n) \geq a \\ \exists x_n \to x \ : \ F_n(x_n) \to a \end{cases}$

$$\Gamma\text{-}\underline{\lim_n} F_n(x) = \min \{ \underline{\lim_n} F_n(x_n) : x_n \to x \}$$

$$\Gamma\text{-}\overline{\lim_n} F_n(x) = \min \{ \overline{\lim_n} F_n(x_n) : x_n \to x \}$$

Пример № 1.

Простой пример Γ-сходимости

Dal Maso, стр. 55

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ - открытое; $a_n \in L^\infty(\Omega)$, $0 < c_1 \le a_n(x) \le c_2 \quad \forall n, x$

$a_n \xrightarrow{*} a$, $\frac{1}{a_n} \xrightarrow{*} \frac{1}{b}$ в $L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))^*$

$F_n : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, $F_n u = \int_\Omega a_n(x)\, u(x)^2\, dx$.

Утв. 1 $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$, $F(u) = \int_\Omega a(x)\, u^2(x)\, dx$ в сильной топологии $L^2(\Omega)$

Д-во fix u_0. $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_{L^2\text{-strong}}(u_0) = \{u : \|u-u_0\|_{L^2} < \delta\}$ // $\mathcal{N}(x)$ можно заменить на базу окрестностей в x

$$? \inf_{u\in\mathcal{U}} F_n(u) = \inf_{u\in\mathcal{U}} \underbrace{\int_\Omega a_n(x)\, u^2\, dx}_{} \underset{[u_0\in\mathcal{U}]}{\le} \int a_n \cdot u_0^2\, dx \to F(u_0)$$

$$\int_\Omega a_n \cdot u_0^2 + a_n\cdot(u-u_0)^2 + 2a_n\cdot u_0(u-u_0) \ge$$

$$\ge \underbrace{\int_\Omega a_n\cdot u_0^2}_{\to F(u_0)} - \cancel{c_1\cdot\delta^2} - 2\underset{C_2}{\cancel{C_1}}\cdot\|u_0\|_{L^2}\cdot\delta$$

$$\left[\begin{matrix}\overline{\lim}_{n\to\infty} \\ \underline{\lim}_{n\to\infty}\end{matrix}\right. \inf_{u\in\mathcal{U}} F_n(u) \left\{\begin{matrix}\le F(u) \\ \ge F(u) - \cancel{c_1\delta^2} - 2\underset{c_2}{\cancel{c_1}}\delta\cdot\|u_0\|_{L^2}\end{matrix}\right.$$

$\sup_{\delta>0}$ $= F(u)$ ∎

Зам. (Dal Maso, Proposition 5.12) Предл. Пусть X - нормированное пр-во, $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ - выпуклые функционалы на X, предположим, что F_n равномерно ограничены в некоторой окрестности точки $x_0 \in X$ $\{ |F_n(y)| \le M \ \forall y\in\mathcal{U}, \forall n\in\mathbb{N} \}$

Тогда: $\Gamma\text{-}\underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x_0) = \underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x_0)$; $\Gamma\text{-}\overline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x_0) = \overline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x_0)$.

// Д-во: используя равностепенную непрерывность F_n около x_0 //

Утв. 2 $G(u) := \int_\Omega b(x)\, u^2(x)\, dx$. $F_n \xrightarrow{\Gamma} G(u)$ в L^2-слабой топологии.

Д-во $\underset{\le F_n(u_0)}{\inf_{y\in\mathcal{U}(x_0)} F_n(y)} = \inf_{\mathcal{U}\cap B(u_0,R)} F_n(y)$ => можно перейти к секвенциальному def

$$\begin{cases} \exists u_n \to u_0 : F_n(u_n) \to G(u) \\ \forall u_n \to u_0 \quad \underline{\lim} F_n(u_n) \ge G(u) \end{cases}$$

Recovery sequence: $\tilde{u}_n := \frac{b\cdot u_0}{a_n} \to u_0$. (счёт)

Lim Inf inequality $\forall u_n \to u_0$. $a_n u_n^2 = a_n((u_n - \tilde{u}_n) + \tilde{u}_n)^2 \ge$

$$\ge a_n \tilde{u}_n^2 + 2a_n\tilde{u}_n\cdot(u_n - \tilde{u}_n)$$

$$F_n(u_n) \ge \cancel{G(weak} \ F_n(\tilde{u}_n) + 2\int_\Omega \underbrace{b\cdot u_0}_{a_n\tilde{u}_n}\,\underbrace{(u_n - \tilde{u}_n)}_{\rightharpoonup 0}$$

$\underline{\lim} F_n(u_n) \ge G(u_0) + 0$ ∎

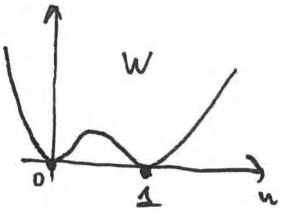
Зам: $L^2 \rightsquigarrow L^2\setminus\{0\}$. $F_n \xrightarrow{\Gamma} F \Rightarrow F_n|_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\Gamma} F|_{\mathcal{U}}$ $\forall\mathcal{U}$-открытое (по def).

Тогда $\Gamma_{strong}\text{-}\lim_n F_n|_{L^2\setminus\{0\}} \ne \Gamma_{weak}\text{-}\lim_n F_n|_{L^2\setminus\{0\}}$ всюду!

Задача о фазовом переходе

$[0,1]$, $u : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \int_0^1 u(t)\,dt = \alpha \text{ - fix}, & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \int_0^1 W(u)\,dt \to \min \end{cases}$$



Ответ: $u = \mathbb{1}_E$, $|E| = \alpha$, $E \subset [0,1]$.

– не соответствует физическому смыслу. $\#|\partial E| \rightsquigarrow \min$

$F_\varepsilon(u) = \int_0^1 \left(W(u) + \varepsilon^2 |u'|^2\right) dt$

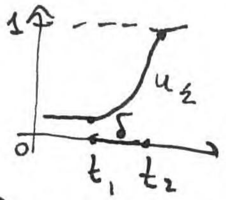
$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_0^1 \left(\frac{W(u)}{\varepsilon} + \varepsilon |u'|^2\right) dt & \text{на } W^{1,2} \\ +\infty & \text{на } L^1 \setminus W^{1,2} \end{cases}$$

$L^1[0,1]$ · сильная топ.

$\Gamma\text{-}\lim F(u) < \infty$ $\qquad \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) < \infty$ $= \Gamma\text{-}\lim F_\varepsilon(u)$

$\left(\exists u_\varepsilon \xrightarrow[L^1]{} u\right)$

$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq M < \infty$. $\Rightarrow$ u_ε много где $\in \approx \{0, 1\}$



u_ε сразу после $t_1 > 0$, сразу перед $t_2 - < 1$

$u' \approx \frac{1}{\delta}$ $\qquad \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon u'^2 \approx \frac{\varepsilon}{\delta}$

$\int_{t_1}^{t_2} \frac{W(u)}{\varepsilon} \approx \frac{\delta}{\varepsilon}$ $\qquad \Rightarrow \sim\left(\frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{\delta}{\varepsilon}\right) \to \min$, $\quad \delta \approx \varepsilon$

δ – ширина слоя границы фаз

$\theta(0,1) = 2\left|\int_0^1 \sqrt{W(t)}\,dt\right|$ – плата за фазовый переход

Общий случай: $W : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $\in C^1$; $Z = \{W = 0\}$ – конечное; $\lim_{s \to \pm\infty} W(s) > 0$

F_ε – такие же. $z, w \in Z$: $\theta(z,w) = 2\left|\int_0^1 \sqrt{W(s)}\,ds\right|$

Th $\exists\ \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon$ в сильной ~~топ~~ L^1-топологии.

Он равен

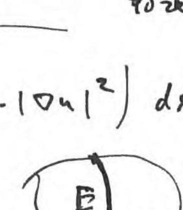
$$F(u) = \begin{cases} \sum_{S(u)} \theta(u^+, u^-), & u \in PC,\ u(t) \in Z \text{ п.в.} \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$PC(0,1) = \{$кусочно-const ф-ии на $[0,1]$ с конечным # разрывов$\}$

$S(u)$ = мн-во ~~разрывов~~ точек разрывов ф-ии u

$\bar{u}_\varepsilon = \arg\min F_\varepsilon$; в старшей размерности: $\int_\Omega \left(\frac{W(u)}{\varepsilon} + \varepsilon \cdot |\nabla u|^2\right) dx$

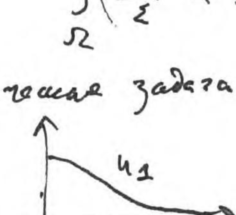
- в Γ-пределе возникает изопериметрическая задача



$\mathcal{H}^{N-1}(\partial E \cap \Omega) \to \min$

$\mathcal{H}^n(\Omega) = \text{fix}$

- $\bar{u}_\varepsilon(x) \approx \mathbb{1}_E + u_1\left(\frac{\operatorname{dist}(x, E)}{\varepsilon}\right)$



„Development by Γ-convergence" $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$, $m_F = \min F$; $\frac{F_\varepsilon - m_F}{\varepsilon^p} = \tilde{F}_\varepsilon$

Пусть $\tilde{F}_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} G$. $m_G = \min G$. $\frac{m_{F_\varepsilon} - m_F}{\varepsilon^p} \to m_G$ $\Rightarrow$ $m_{F_\varepsilon} = m_F + \varepsilon^p m_G + O(\varepsilon^p)$

Компактность некоторых классов.

Постановка условия Дирихле.

„Порядковые" свойства Γ-сходимости

Предложение (6.16) Пусть $\varphi: \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ – возрастающая, непрерывная.

Тогда
$$\Gamma\text{-}\begin{matrix}\underline{\lim}_n \\ \overline{\lim}_n\end{matrix} (\varphi \circ F_n) = \varphi\left(\Gamma\text{-}\begin{matrix}\underline{\lim}_n \\ \overline{\lim}_n\end{matrix} F_n\right)$$

Предл. a. $\{F_n\}$ – возрастающая (по n). Тогда $\exists\ \Gamma\text{-}\lim_n F_n = \lim_{n\to\infty} sc^- F_n = \sup_n sc^- F_n$

b. F_n – убывает пос. Тогда ~~…~~ $\Gamma\text{-}\lim_n F_n = sc^-(\inf_n F_n)$

Компактность ~~…~~ семейства вообще всех ф-лов.

Th Пусть X имеет счётную базу (2 аксиома счётности). Тогда $\forall \{F_n\}\ \exists \{F_{n_k}\} : F_{n_k} \xrightarrow{\Gamma}$.

Д-во U_j – база топологии в X. $\{U_j\} = \mathcal{B}$

Диаг. процесс: считаем, что $\forall U_j\ \exists \lim_{k\to\infty} \inf_{y\in U_j} F_{n_k}(y) \in \overline{\mathbb{R}}$

$$F(x) := \sup_{U_j \in \mathcal{B} \cap N(x)} \lim_{k\to\infty} \inf_{y\in U_j} F_{n_k}(y)$$

$$\Rightarrow F(x) = \sup_{U\in N(x)} \begin{matrix}\overline{\lim}_k \\ \underline{\lim}_k\end{matrix} \inf_{y\in U} F_{n_k}(y)$$

$\forall U \in N(x)\ \exists\ U_j \subset U$

~~$A\in\mathcal{A}(\Omega)$~~ $f_n(x, Du(x))$ (Dal Maso)

$\int_\Omega f_n(x, Du)\,dx = F_n(u)$. ? $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$, $\tilde F$ - такого же вида

$F_n \rightsquigarrow F_n(u, A) = \int_A f(x, Du)\,dx$, $A \in \mathcal{A}(\Omega) = \{$все открытые в $\Omega\}$? $\tilde F(u_0, \cdot)$ - мера ?

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ - огр. открытое, $1 \leq p < +\infty$. $c_1 \geq c_0 > 0$

$\mathcal{J} = \mathcal{J}(p, c_0, c_1)$ = функционалы $F : L^p(\Omega) \times \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ т.ч. :

$\exists$ борелевская $f: \Omega \times \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$, $c_0 |\xi|^p \leq f(x, \xi) \leq c_1(|\xi|^p + 1)$ $\forall x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$F(u, A) = \begin{cases} \int_A f(x, Du)\,dx, & \text{если } u|_A \in W^{1,1}_{loc}(A) \quad W^{1,p}(A) \\ +\infty, & u \in L^p(\Omega) \setminus W^{1,1}_{loc}(A) \end{cases}$$

Th $\forall \{F_n\} \subset \mathcal{J}(p, c_0, c_1)$ $\exists$ F_{n_k} и $F \in \mathcal{J}(p, c_0, c_1)$ т.ч. $F_{n_k}(\cdot, A) \xrightarrow{\Gamma} F(\cdot, A)$ в $L^p(\Omega)$ (сильной или слабой) $\forall A \in \mathcal{A}$.

Идеи д-ва:
- локализация по A
- $\{F(u, A)\}$, их оболочки по A: $F_-(u, A) = \sup_{B \subset\subset \operatorname{Int} A} F(u, B)$ $(B \subset\subset A)$
  A - борелевские
- $\mathcal{D}$ = нек. семейство борелевских мн-в - „плотное", если $\forall A, B$ - борелевские, $A \subset\subset B$, $\exists\, C \in \mathcal{D}$: $A \subset\subset C \subset\subset B$.
- Γ-сходимость ф-лов вида $F_n(\cdot, \cdot)$
- ? если $\forall n$ $F_n(u, \cdot)$ - мера, то Γ-$\lim F_n$ - тоже ?
  не всегда. => нужна „фундаментальная оценка"

  Опр Пусть $F: L^p(\Omega) \times \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ - ф-л. F удовлетворяет фундаментальной оценке, если: $\forall \varepsilon > 0$, $\forall A', A'', B \in \mathcal{A}$, $A' \subset\subset A''$ $\exists M = M(\varepsilon) > 0$, $< \infty$: $\forall u, v \in L^p(\Omega)$ $\exists \varphi$ - срезающая ф-я между A' и A'' ($\varphi \in C_0^\infty(A'')$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ вблизи $\bar A'$)

  $$F(\varphi u + (1-\varphi) v, A' \cup B) \leq (1+\varepsilon)\big(F(u, A'') + F(v, B)\big) + \varepsilon\big(\|u\|^p_{L^p(S)} + \|v\|^p_{L^p(S)}\big) + M\, \|u - v\|^p_{L^p(S)}, \quad S = (A'' \setminus A') \cap B.$$

- Если $\{F_n\}$ равномерно фундаментальны $\begin{pmatrix} M = M(\varepsilon, A', A'', B) \\ \varphi = \varphi(F_n, u, v) \end{pmatrix}$, то Γ-$\lim F_n$ - мера $(F(u_0, \cdot))$
- Конкретные классы равномерно фундаментальны.
- мера => мера специального вида (e.g. как в $\mathcal{J}(p, c_0, c_1)$)

Braides $\quad f : (a,b) \times \mathbb{R} \to [0,+\infty)$, $\quad c_0 |z|^p \le f(t,z) \le c_1 (|z|^p + 1)$

$z \mapsto f(t,z)$ - выпукла $\forall\, t \in (a,b)$ $\qquad F(u) = \int_a^b f(x, u'(x))\, dx$

$$f^*(t, z^*) = \sup \{ z^* z - f(t,z) \mid z \in \mathbb{R} \}$$

Утв. $F_n(u) = \int_a^b f_n(x, u'(x))\, dx$ $\;\Gamma$-сходится к $\underset{\int f(x,u')}{F(u)}$ в сильной или слабой топологии L^p $\iff$ $\forall\, z^* \in \mathbb{R}$ $\;f^*(\cdot, z^*)$ - слабый* предел $f_n^*(\cdot, z^*)$

Утв. $f(z) \ge c_1 |z|^p - c_2$; f_n - такие. $\qquad F_n(u) := \int_a^b f_n(u)\, dx$

$f(0) \le c_3$ $\qquad F_n : L^p(a,b) \to \overline{\mathbb{R}}$

$1 < p < \infty$

f - борелевские

$$F_n \xrightarrow[L^p\text{-слабая}]{\Gamma} F \iff f_n^{**} \;\Gamma\text{-сходятся в } \mathbb{R} \text{ к нек. } f$$

(если f_n^{**} равномерно лок. огр., то это поточечная сх-ть)

В этом случае $\quad F(u) = \int_a^b f(u)\, dt$

Пример 1. $\quad F_n(u) = \int_{-1}^{1} a_n(t)\, u'(t)^2\, dt, \qquad a_n(t) = \begin{cases} 1, & |t| \ge \frac{1}{2n} \\ \frac{1}{n}, & \text{иначе.} \end{cases}$

$u \in L^2(-1,1)$, $\left[\begin{array}{l}\text{сильная} \\ \text{слабая}\end{array}\right.$ сх-ть.

$$\Gamma\text{-}\lim F_n(u) = \begin{cases} \int_{(-1,1)\setminus\{0\}} |u'|^2 + |u(0+) - u(0-)|^2, & \text{если } u \in W^{1,2}((-1,1)\setminus\{0\}) \\ +\infty, & \text{иначе}, \; u \in L^2 \end{cases}$$

2. $\quad G_p(u) = \left(\frac{1}{p} \int_0^1 |a u'|^p\, dt \right)^{1/p}$, $\quad a$ - измеримая, $\;\inf a > 0$, $\;\sup a < \infty$

$$\underset{\substack{L^1\text{- слабая} \\ \text{сильная}}}{\Gamma\text{-}\lim_{p\to\infty}} G_p(u) = G(u) = \| a u' \|_\infty$$

2'. $$\underset{L^1\text{- сильная}}{\Gamma\text{-}\lim_{p\to\infty}} G_p^p = \begin{cases} 0, & \text{если } |a u'| \le 1 \text{ п.в. на } (0,1) \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

О краевом условии Дирихле

Braides, $\dim = 1$

$\varphi \in W^{1,p}[0,1]$

$\measuredangle$ ф-ла вида $\quad F(u) = \int_0^1 f(t,u')\,dt$, где: $\left[f(t,\xi) \text{ выпукла по } \xi\right]$

$$c_0|\xi|^p \le f(t,\xi) \le c_1(|\xi|^p+1)$$

$$\tilde F(u) = \tilde F^{\varphi}(u) = \begin{cases} F(u), \text{ если } u=\varphi \text{ на } \partial[0,1],\ u\in W^{1,p}[0,1] \\ +\infty, \text{ иначе на } L^p \end{cases}$$

Утв. F_n, F - такие. Если $F_n \xrightarrow[L^p\text{-сильно}]{\Gamma} F$, то $\tilde F_n \xrightarrow[L^p\text{-сильно}]{\Gamma} \tilde F$.

Д-во $u_0 \in L^p[0,1]$. ? $\Gamma\text{-}\lim\limits_n \tilde F_n(u_0) = \tilde F(u_0)$

Сл. 1 $\quad u_0 \notin \varphi + \mathring W^{1,p}$. $\tilde F(u_0) = +\infty$. ? $\Gamma\text{-}\underline{\lim}_n \tilde F_n(u_0) = +\infty$?

$$\Gamma\text{-}\underline{\lim}_n \tilde F_n = \inf_{u_n \xrightarrow[L^p]{} u_0} \underbrace{\underline{\lim}_n \tilde F_n(u_n)}$$

? $=\infty\ \forall u_n \to u_0$. Если он $<\infty$,

то $\exists u_{n_k} \in \varphi + \mathring W^{1,p}$, $\sup \|u_{n_k}\|_{W^{1,p}} < \infty$ $\Rightarrow u_0 \in \varphi + \mathring W^{1,p}$ $\left(u_{n_k} \xrightarrow[W^{1,p}]{} u_0\right)$ ⊡

Сл. 2 $\quad u_0 \in \varphi + \mathring W^{1,p}$

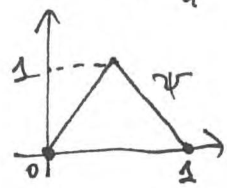
$\Gamma\text{-}\underline{\lim}_n \tilde F_n(u_0) \ge \tilde F(u_0) = F(u_0)$ // $\Gamma\text{-}\underline{\lim}_n \tilde F_n(u_0) \ge \Gamma\text{-}\underline{\lim}_n F_n(u_0) = F(u_0)$ //

$\inf\limits_{u_n \to u_0} \underline{\lim}_n \tilde F_n(u_n) \ge \inf\limits_{u_n\to u_0} \underline{\lim}_n F_n(u_n) \ge [\text{т.к. } F_n \to F] \ge F(u_0)$

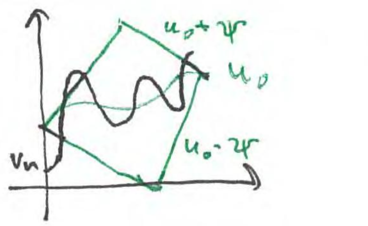
? $\Gamma\text{-}\overline{\lim}_n \tilde F_n(u_0) \le \tilde F(u_0) = F(u_0)$

$\inf\limits_{u_n\to u_0} \overline{\lim}_n \tilde F_n(u_n)$ $\Rightarrow$ надо: $\exists u_n : u_n - \varphi \in \mathring W^{1,p}[0,1]$; $\overline{\lim}_n F_n(u_n) \le F(u_0)$

Знаем: $\exists v_n \in W^{1,p}$: $v_n \to u_0$. $\overline{\lim}_n F_n(v_n) \le F(u_0)$.



$$u_n(t) = \begin{cases} u_0+\Psi, & v_n \ge u_0+\Psi \\ v_n, & u_0+\Psi \ge v_n \ge u_0-\Psi; \\ u_0-\Psi, & u_0-\Psi \ge v_n \end{cases}$$



$|u_n - u_0| \le |v_n - u_0| \Rightarrow u_n \xrightarrow[L^p]{} u_0$. $u_n \in \varphi + \mathring W^{1,p}$

$$F_n(u_n) = \int_0^1 f_n(t,u_n')\,dt = \int_{v_n \ge u_0+\Psi} + \int_{v_n \le u_0-\Psi} + \int_{u_n = v_n} = \mathrm{I}_n + \mathrm{II}_n + \mathrm{III}_n$$

$\overline{\lim}_n \mathrm{III}_n \le \overline{\lim}_n F_n(v_n) \le F(u_0)$

$\overline{\lim}_n \mathrm{I}_n = \overline{\lim}_n \int_{v_n \ge u_0+\Psi} f(t, u_0'+\Psi')\,dt \le \overline{\lim}_n \int_{v_n\ge u_0+\Psi} c_1(1+|u_0'+\Psi'|^p)\,dt \rightarrow 0,$

т.к. $\left|\{v_n \ge u_0+\Psi\}\right| \to 0$ $(v_n \to u_0 \text{ в } L^p)$

II_n - так же ⊡

Теория потенциала

Adams, Hedberg

$\mathrm{Cap}(K) = \inf\{\|\varphi\|^2_{W^{1,2}(\mathbb{R}^N)};\ \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ \varphi\geq 1$ на $K\}$
(K - компакт)

$\mathrm{Cap}(\omega) = \sup\limits_{K\subset\omega \text{ - комп.}} \mathrm{Cap}\,K$
(ω - открытое)

$\overline{\mathrm{Cap}}\,E = \inf\limits_{\omega\supset E} \mathrm{Cap}\,\omega$
E - $\forall$

абстрактный подход

Брело, "Основы классической теории потенциала"
Карлесон, "Избранные проблемы теории исключительных множеств"

? $\overline{\mathrm{Cap}}\,E = \underline{\mathrm{Cap}}\,E$? — верно, если E - борелевское, (Шоке)
если только это верно для компактных.

Th Пусть $f_n \xrightarrow[W^{1,2}(\mathbb{R}^N)]{} f$. Тогда $\exists\, f_{n_k}$:
a. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ для квазивсех $x\in\mathbb{R}^N$
b. $\forall\varepsilon>0\ \exists\, G$ - открытое в $\mathbb{R}^N$: $\mathrm{Cap}(G)<\varepsilon$, $f_{n_k} \underset{\mathbb{R}^N\setminus G}{\rightrightarrows} f$

Опр $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ наз. квазинепрерывной, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\, G\subset\mathbb{R}^N$ - открытое, $\mathrm{Cap}\,G<\varepsilon$,
т.ч. $f\big|_{\mathbb{R}^N\setminus G}\in C(\mathbb{R}^N\setminus G)$

Сл-е $\forall f\in W^{1,2}\ \exists\, \tilde f = f$ п.в. т.ч. $\tilde f$ квазинепрерывна. [уточнённая, BLD = Beppo Levi, Deny, ещё Lions - старший]

Точки Лебега соболевских ф-й:
Th $f\in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$; для квазивсех $x\in\mathbb{R}^N$ $\exists\, \tilde f(x) := \lim\limits_{r\to0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy$

$\lim\limits_{r\to0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|\tilde f(x)-f(y)|^{\cancel{2}\,q}\,dy \to 0$ $\quad q\leq p^* = \frac{Np}{N-p},\ q<\infty$

Сходимость равномерна вне множества сколь угодно малой ёмкости, $\tilde f$ - квазинепр.

Тонкая топология и квазиоткрытые множества (Fine topology)

Опр Тонкая топология в $\mathbb{R}^N$ - слабейшая, в которой все супергармонические функции непрерывны.

Опр $E\subset\mathbb{R}^N$, $x_0\in\mathbb{R}^N$. E разрежено в x_0, если $\exists$ супергармоническая ф-я v в $\mathbb{R}^N$,
т.ч. $v(x_0) < \varliminf\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0\\ x\in E}} v(x)$ $\left[\begin{matrix} = +\infty \\ v(x_0)<\infty\end{matrix}\right]$

Th (критерий Винера) E - разреженное в(-) x_0 $\Leftrightarrow$ $\int_0^1 \frac{\mathrm{Cap}(E\cap B(x_0,r))}{r^{N-2}}\,\frac{dr}{r}<\infty$

Th Картана $U\subset\mathbb{R}^N$ - тонкая окрестность точки $x_0 \Leftrightarrow \mathbb{R}^N\setminus U$ разрежено в x_0.
(содержит тонко открытое $\ni x_0$)

Пример

Опр $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ наз тонко непрерывна в (·) x, если $\forall\varepsilon>0$ $\{y: |f(y)-f(x)|\geq\varepsilon\}$ — ~~квази~~ ~~тонко~~ разрежено в (·) x.

т.е. $\{y: |f(y)-f(x)|<\varepsilon\}$ — тонкая окрестность x

Зам. $\mathbb{R}^2$, $f(x)=\mathbb{1}_{\{0\}}$. Квазинепрерывна, но тонко разрывна в нуле.

Th $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. f квазинепрерывна $\iff$ f тонко непрерывна в квазивсех точках $\in\mathbb{R}^n$

Квазиоткрытые vs. тонко открытые:

$E\subset\partial U$, $\operatorname{Cap} E=0$ борелевское

$U\cup E$ — квазиоткрытое

Опр $E\subset\mathbb{R}^n$ — квазиоткрытое, если $\forall\varepsilon>0\ \exists G\subset\mathbb{R}^n$ — открытое, т.ч. $\operatorname{Cap} G<\varepsilon$, $E\cup G$ — открытое

Или: $E\setminus\tilde{G}$ открыто в $\mathbb{R}^n\setminus\tilde{G}$

Зам Счётные $\bigcup$ квазиоткрытых — квазиоткрытые, но не $\forall\bigcup$

$\Rightarrow$ тонко открытые ☹
квази открытые ☺

Утв $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^*$ квазинепрерывна $\iff$ $f^{-1}((\alpha,\beta))$ — квазиоткрыто $\forall(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$

Предложение 1. Тонко открытое $\Rightarrow$ квазиоткрытое

2. E — квазиоткрытое, тогда $\operatorname{Cap}(E\setminus \operatorname{Int}_{\text{FINE}} E)=0$

Зам. {Квазиоткрытые} — квазитопология, т.е. счётные $\bigcup$ q.o. — q.o. Но не $\forall\bigcup$: $\bigcup\underbrace{\{x\}}_{\text{q.o.}}$ = замкнутый шар — не q.o

Теорема аппроксимации

$$H^1_0(\Omega)=\begin{cases}\operatorname{clos}_{H^1(\mathbb{R}^n)} C_0^\infty(\Omega)\\ \{u\in H^1(\mathbb{R}^n),\ u \text{ квазинепр.},\ u=0 \text{ q.e. в } \mathbb{R}^n\setminus\Omega\}\end{cases}$$

Ω — откр. ~~огр.~~

Утв. Определения равносильны.

Th $m\in\mathbb{N}$, $p\in(1,+\infty)$; $f\in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — $\forall$ открытое. TFAE:

a. $D^\beta f|_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}=0\ \forall\beta: |\beta|\leq m-1$ // $\underbrace{D^\beta f}_{g}\in W^{m-|\beta|,p}(\mathbb{R}^n)$
g имеет $(m-|\beta|,p)$-квазинепр. представителе
этот представитель $=0$
$(m-|\beta|,p)$ — q.e. на $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$.

b. $f\in\mathring{W}^{m,p}(\Omega)$, т.е. можно приблизить

c. $\forall\varepsilon>0\ \forall F\subset\Omega$ — комп. $\exists\eta\in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta=1$ на F, $0\leq\eta\leq1$, $\|f-\eta f\|_{W^{m,p}}<\varepsilon$.

Д-во для $m=1$ — простое; Adams, Hedberg, стр 239-240, п.п. 9.2.

$x \in (\mathbb{R}^N \setminus G) \cap (\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$

$f_\varepsilon \cdot (1-\omega_\delta) = 0$ вблизи x ?

$\max\{f-\varepsilon, 0\}$

$f|_{\mathbb{R}^N \setminus G}$ непр. в (·) x

$$f_\varepsilon \cdot (1-\omega_\delta) = 0 \begin{cases} \text{на } G \\ \text{на } \mathbb{R}^N \setminus (\Omega \cup G) \end{cases}$$

? $f(x) = 0$

$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ q.e. } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \\ f \in H^1 \; f\text{- квазинепр.} \end{cases} \Rightarrow \forall \delta > 0 \; \exists G\text{-откр.}: f|_{\mathbb{R}^N \setminus G}\text{-непр.}$

$f|_{(\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \setminus G} = 0$ всюду

$$\big(f_\varepsilon (1-\omega_\delta)\big)(x) = 0 \text{ вблизи } \forall x_0 \begin{cases} \in G \\ \in \mathbb{R}^N \setminus (\Omega \cup G) \end{cases}$$

вблизи $\forall x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$

$\operatorname{Cap} G < \delta \Rightarrow \exists \omega \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $\omega = 1$ всюду на G, $\int_{\mathbb{R}^N} \omega^2 + |\nabla \omega|^2 < \delta$

$$\left(\omega_\delta \nabla f_\varepsilon + f_\varepsilon \nabla \omega_\delta\right)^2$$

Ёмкостные меры.

γ- сходимость.

Ёмкостные меры (Dal Maso, Mosco) Wiener's criterion & Γ-convergence, 1987

Опр $\mathcal{M}_0 = \{$неотрицательные борелевские меры в $\mathbb{R}^N$, т.ч. $\mu(E)=0$, если $\operatorname{Cap} E = 0\}$ — ёмкостные меры.

Пример. $\mathcal{H}^N$; $\mathcal{H}^{N-2}$ (лемма Фростмана)

$E \subset \mathbb{R}^N$ - борелевское; $\infty_E(B) = \begin{cases} 0, & \operatorname{Cap}(E\cap B) = 0 \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$ $\quad \mathcal{H}^\alpha$ борелевская — по критерию Каратеодори

$\tilde\infty_E(B) = \begin{cases} 0, & |E\cap B| = 0 \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$

Зам. μ - ёмкостная, $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Считаем, что u - уточнённая.
$\Rightarrow$ корректно определён $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 d\mu$ (может быть $+\infty$)

$\mu_1 \sim \mu_2$, если $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}^N} u^2 d\mu_2$ $\forall u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. $\quad \mathcal{M}_0 := \mathcal{M}_0/_\sim$

E - шар $\Rightarrow \infty_E \sim \tilde\infty_E$
E - интервал $\Rightarrow$ неверно

Функционалы, порождённые ёмкостными мерами:

$\mu \in \mathcal{M}_0$; $\quad F_\mu(u,\Omega) = \begin{cases} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega u^2 d\mu, & \text{если } u \in H^1_0(\Omega) \\ +\infty, & \text{иначе } u \in L^2(\Omega) \text{ или } L^2(\mathbb{R}^N) \end{cases}$

Ω пробегает ограниченные открытые

Зам. $\mu = \infty_E$ $\quad F_\mu(u,\Omega) < \infty \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow u \in H^1_0(\Omega)$, $u = 0$ на E в смысле уточнённого следа (к.в.)

Опр. $\mu_n \in \mathcal{M}_0$, $n = 1, 2, \dots$.
$\mu_n \xrightarrow{\gamma} \mu \in \mathcal{M}_0$, если
$F_{\mu_n}(\cdot,\Omega) \xrightarrow{\Gamma} F_\mu(\cdot,\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ (*) — сильной
$\forall \Omega \subset \mathbb{R}^N$ - ограниченное, открытое.

Предложение (4.9 Dal Maso Mosco) γ-сходимость метризуема на $\mathcal{M}_0$.

Зам. $-\Delta u + \mu u = f$ в Ω
$u \in H^1_{loc}(\Omega) \cap L^2_{loc}(\Omega,\mu)$ — Дальше
$f \in L^2_{loc}(\Omega)$

$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle dx + \int_\Omega uv\, d\mu = \int_\Omega fv$, $v \in H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega,\mu)$, $\operatorname{supp} v \subset\subset \Omega$

Утв. Если μ - мера Радона, то u - решение (как выше) $\Leftrightarrow$ u - решение в смысле распределений, т.е. $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$ —||—

Тм $g \in H^1(\Omega)$, $\exists w \in H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega,\mu)$: $w - g \in H^1_0(\Omega)$.
Тогда $\exists!$ „слабое" решение ($f=0$), и оно - arg min функционала $\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega v^2 d\mu$

Схема д-ва: пусть X - метрическое, сепарабельное, $\Psi: X \to \overline{\mathbb{R}}$: Ψ - коэрцитивна, т.е. $\forall t \in \mathbb{R}$ $\operatorname{cl}_X\{x : \Psi(x) \le t\}$ - предкомпактно. $\Psi \in LSC$!
(В общем случае - счётно компактно)

$LSC_\Psi(X) = \{F : X \to \overline{\mathbb{R}} : F \ge \Psi\}$, F - полунепр. снизу. $\exists$ метрика δ на LSC_Ψ, т.ч. сходимость в этой метрике $\Leftrightarrow$ Γ-сходимость. (LSC_Ψ, δ) компактно

$\{\Omega_n\}$ - счётное семейство откр. мн-в $\subset \mathbb{R}^N$ т.ч. $\forall \Omega' \subset\subset \Omega''$ $\exists n$: $\Omega' \subset \Omega_n \subset \Omega''$
Сложим метрики для $F(\cdot, \Omega_n) \Rightarrow \square$

Зам. $sc^- F$ - max полунепр. снизу миноранта для F.
a. $\Gamma\text{-}\overline{\lim_n} F_n = \Gamma\text{-}\overline{\lim_n}\, sc^- F_n$, $\quad \Gamma\text{-}\underline{\lim_n} F_n = \Gamma\text{-}\underline{\lim_n}\, sc^- F_n$
b. $\forall \{F_n\}$ $\quad \Gamma\text{-}\overline{\lim_n} F_n$, $\Gamma\text{-}\underline{\lim_n} F_n$ полунепрерывны снизу.

$\Psi = \int_\Omega |\nabla u|^2$
$\{\Psi \le t\}$ предкомп. в $L^2(\Omega)$ - сильной топ., т.к. Ω - огр

Утв. $\mu_n \xrightarrow{\gamma} \mu$ в L^2-слабой топологии $\iff$ в L^2-сильной топологии

Д-во $\Gamma_w\text{-}\underline{\lim} \le \Gamma_s\text{-}\underline{\lim}$; $\Gamma_w\text{-}\overline{\lim} \le \Gamma_s\text{-}\overline{\lim}$ fix Ω, $F_n := F_{\mu_n}(\cdot;\Omega)$

~~Пусть~~ $\exists\ \Gamma_s\text{-}\lim$. ~~Надо~~ Плохо, если $\Gamma_w\text{-}\lim \lneq \Gamma_s\text{-}\lim$ $t_1 < +\infty$

$\le t_1 < t_2 \le \infty$

$u_0 \in L^2(\Omega)$ $\quad \mathcal{N}_w(u_0)$

$$\sup_{U_w \in \mathcal{N}_w(u_0)} \underline{\lim_n} \underbrace{\inf_{v \in U_w} F_n(v)}\ \le t_1$$

~~$\inf_{v\in U_w} \int_\Omega |Dv|^2 dx \le t_1$~~

~~$\forall U_w \in \mathcal{N}_w(u_0)$ $\inf_{v \in U_w} F_n(v) \le t_1$~~

$\Rightarrow \exists\ R(t = R(t_1, \ldots))$: $\|H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)\|$

$R(t_1, u_0, \Omega) > \|u_0\|_{L^2}$

$\inf_{v \in U_w} F_n(v) \le t$, $t < t_1+1$

$\Downarrow$

$\inf_{v \in U_w \cap B_{L^2}(0,R)} F_n(v) \le t$

$v \notin H^1_0(\Omega) \Rightarrow$ не уменьшает inf
$v \in H^1_0(\Omega)$, $\|v\| > R \Rightarrow \int |Dv|^2 > \tilde{R}(R)$
$\Rightarrow$ достаточно сделать $\tilde{R} > t_1 + 1$

$\Gamma_w\text{-}\underline{\lim_n} F_n|_{B_{L^2}(0,R)}(u) \le t_1$

$\Downarrow$ (секвенциальность)

$\exists\ u_n \xrightarrow{L^2} u_0$: $\underline{\lim_n} F_n(u_n) \le t_1$

$\|u_n\|_{L^2} \le R$, но это не нужно

$\sup_{n_k} \int_\Omega |Du_{n_k}|^2 < \infty$, $\le t_1$

$u_{n_k} \in H^1_0(\Omega)$

$\Rightarrow u_{n_k} \xrightarrow{L^2} u_0$

$\underline{\lim} F_{n_k}(u_{n_k}) \le t_1$

$\Downarrow$

$\Gamma_s\text{-}\underline{\lim} F_n(u_0) \le t_1$

$\left[\exists u_n \xrightarrow{L^2} u_0 : \underline{\lim_n} F_n(u_n) \le t_1\right]$

$u_0\, u_0 \ldots u_0\, u_{n_1}\, u_0 \ldots u_0\, u_{n_2}\, u_0 \ldots u_{n_3}$

$\exists\ \Gamma_w\text{-}\lim \Rightarrow \exists\ \Gamma_s\text{-}\lim$ — аналогично

$\Gamma_w\text{-}\overline{\lim} F_n \ge \Gamma_s\text{-}\overline{\lim}$ — даже проще

(8.1)
Предложение Пусть X — т.п. с первой аксиомой счётности. $F'(x) = \Gamma\text{-}\underline{\lim_n} F_n(x)$. Тогда F' задаётся так:

1. $\forall x_n \to x$ $\quad F'(x) \le \underline{\lim_n} F_n(x_n)$

$\exists x_n \to x$: $F'(x) = \underline{\lim_n} F_n(x_n)$

$F''(x) = \Gamma\text{-}\overline{\lim_n} F_n(x) \iff$

$\iff \begin{cases} F''(x) \le \overline{\lim_n} F_n(x_n)\ \forall x_n \to x \\ \exists x_n \to x : F''(x) = \overline{\lim_n} F_n(x_n) \end{cases}$

(Dal Maso)

Предложение 8.10 Пусть X — банахово пр-во, оснащено слабой топологией. X^* — сепарабельно. Пусть d — метрика на X, т.ч. : на $\forall B_X(0,R)$, $R < \infty$, слабая топология совпадает с топологией метрики d
($\iff$ $\{x_n\}$ сходится слабо к $x \in X \iff x_n$ ограничена по норме и сходится к x в метрике d)

Пусть $\Psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$: $\Psi(x) \xrightarrow[\|x\|_X \to \infty]{} +\infty$.

$F_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $F_n(x) \ge \Psi(x)$ $\forall x$. Тогда $\Gamma_w\text{-}\overline{\lim_n} F_n = \Gamma_d\text{-}\overline{\lim_n} F_n$,

$\Gamma_w\text{-}\underline{\lim_n} F_n = \Gamma_d\text{-}\underline{\lim_n} F_n$.

Кроме того, $\Gamma_w\text{-}\overline{\lim}$, $\Gamma_w\text{-}\underline{\lim}$ определяются данным секвенциальным определением.

(у нас $\Psi(u) = \|u\|^2_{L^2} \ge [\lim \|Du\|^2_{L^2}]$, $X = L^2(\Omega)$, d — метрика, дающая слабую сх-ть на $\forall$ шаре)

Зам. X — рефлексивное банахово, сепарабельное. $X \hookrightarrow W$ компактно. $d(x,y) := \|x-y\|_W$ на X. Тогда на $\forall$ огр. мн-ве в X и X^*-слабая топология совпадает с d-топологией.
($\|\cdot\|_X$-огр.)

Например: $X = H^1_0(\Omega)$, $W = L^2(\Omega)$, Ω — ограниченное, $\Psi := \|Du\|_{L^2}$

$\Rightarrow \Gamma\text{-}\lim \left(F_{\mu}(\cdot,\Omega)\big|_{H^1_0(\Omega)}\right)(u_0) = F_\mu(u_0,\Omega)$, если $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ в $H^1_0(\Omega)$-слабой топ.

Зам. Г-сходимость на полунепрерывных снизу функциях топологизируема.
Если X - т.п. "k-space", достаточно: [первая аксиома счётности / локально компактно

$E \subset X$, $J_E(F) := \inf_{E \ni x} F(x)$

$\{F \in LSC(X) : J_U(F) < t\}$ (U - откр.) $\quad \{J_K > t\}$ (K - комп.)
- предбаза некоторой топологии τ. Утв. Г-сходимость на $LSC(X)$ совпадает с τ-сходимостью.

Теорема Для $\forall \{\mu_n\} \subset M_0$ $\exists \{\mu_{n_k}\}$, γ-сходящаяся к нек. $\mu \in M_0$.

Th $\forall \mu \in M_0$ $\exists \{E_n\}$ - посл-ть компактов в $\mathbb{R}^N$, т.ч. $\infty_{E_n} \xrightarrow{\gamma} \mu$.

Пример перфорированных областей.

Утв. $E_n = \{ (\frac{k}{n}, \frac{l}{n}) + Q_n \}_{k,l \in \mathbb{Z}+1/2}$, $E_n \subset \mathbb{R}^2$

$Q_n = [-\frac{1}{2n} e^{-n^2}, \frac{1}{2n} e^{-n^2}]^2$ // или: $B\left(\left(\frac{k+\frac12}{n}, \frac{l+\frac12}{n} \right), \frac{1}{2n} e^{-n^2} \right)$

$\exists\, c_1, c_2 : \quad 0 < c_1 \le c_2 < +\infty : \quad \underset{\exists \{n_k\}}{\infty_{E_{n_k}}} \xrightarrow{\Gamma} \int \rho\, dx, \quad c_1 \le \rho(x) \le c_2$

Д-во $\exists\, n_k : \infty_{E_{n_k}} \xrightarrow{\Gamma} \mu$ $\quad n_k = k$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - открытое, $\Omega = (-R, R)^2$, $R \in \mathbb{N}$. $\quad F_{\infty_{E_n}}(\cdot, \Omega) \xrightarrow{\Gamma} F_\mu(\cdot, \Omega)$

в сильной топ. $L^2(\Omega)$

$\forall u \in L^2(\Omega) \quad \Gamma\text{-}\underline{\lim}_n F_{\infty_n}(u) \ge F_\mu(u)$. $\quad L^2$ - метрическое!

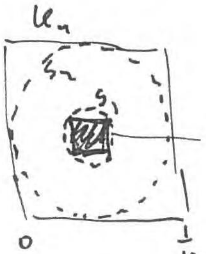
$\Rightarrow \forall \{u_n\} \subset L^2$, $u_n \xrightarrow[L^2]{} u$: $\quad \underline{\lim}_n F_n(u_n) \ge F_\mu(u)$. $\quad u \in C^1(\Omega)$: $u = 0$ на $\partial\Omega$

$= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 + \int_\Omega u_n^2\, d\mu$

$\Rightarrow$ надо: $u_n = 0$ на $\Omega \setminus E_n$

$\underline{\lim}_n F_n(u_n) < \infty \Rightarrow u \in H^1_0$

но можно тестировать μ любыми u, т.к. это дает оценку на $\int_\Omega u^2 d\mu$ сверху $\Rightarrow$ и на μ.

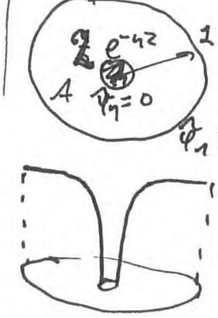


$\varphi_n = 0$ на S_1 и внутри S_1

$\varphi_n = 1$ вне на S_2 и вовнешности S_2

$\Delta \varphi_n = 0$ во кольце между S_1 и S_2

Конформно эквивалентна такой:



$\bar{\varphi}_n(z) = -\frac{\log|z|}{\log e^{-n^2} \cdot 2} + 1$

$\int_A |\nabla \bar{\varphi}_n|^2 = \frac{2\pi}{|\log(2e^{-n^2})|} \asymp \frac{1}{n}$

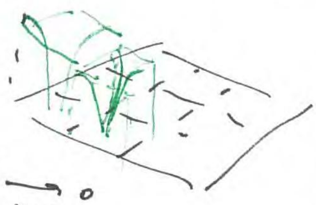
$\int_A (1 - \bar{\varphi}_n)^2 = O(1)$

$\Rightarrow \int_{K_n} |\nabla \varphi_n|^2 \asymp \frac{1}{n^2}$, $\quad \int_{K_n} (1 - \varphi_n)^2 = O(\frac{1}{n^2})$

$\tilde{\varphi}_n(z) = \varphi_n(z - (\frac{k}{n}, \frac{l}{n}))$ в $(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}) + Q_n$, $k, l \in \mathbb{Z} + \frac12$

$\tilde{\varphi}_n : \Omega \to \mathbb{R}^2$

$u_n := \tilde{\varphi}_n \cdot u : \Omega \to \mathbb{R}$. $\quad u_n \in H^1_0(\Omega \setminus E_n)$



$\int_\Omega u_n^2\, d\mu_{\infty_{E_n}} = 0$; $\quad$? $u_n \xrightarrow[L^2]{} u$ $\quad \int_\Omega u^2 (1 - \tilde{\varphi}_n)^2 \le$

(u_n-утончённая!)

$\le \sup_\Omega u^2 \cdot \int_\Omega (1 - \tilde{\varphi}_n)^2 = n^2 \cdot \sup_\Omega u^2 \cdot \frac{1}{n^2} \int_{K_n} (1 - \varphi_n)^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 = \underbrace{\int_\Omega \tilde{\varphi}_n^2 \cdot |\nabla u|^2 dx}_{I_1} + \int_\Omega u^2 \cdot |\nabla \tilde{\varphi}_n|^2 dx \;\; \cancel{\le I_1 + I_2} + 2\int \tilde{\varphi}_n \nabla \tilde{\varphi}_n \cdot u \cdot \nabla u = I_1 + I_2 + I_3$

$\tilde{\varphi}_n(z) \in [0,1] \;\forall z \Rightarrow I_1 \le \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$

$u \in C(\Omega)$; $\quad \int_\Omega |\nabla \tilde{\varphi}_n|^2 dx \asymp 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{\lim}_n I_2 \le C \cdot \int_\Omega u^2 dx$

$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega u^2 d\mu \le \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + C \cdot \int_\Omega u^2 dx \Rightarrow (R - \forall)$ μ-мера Радона $\mu(\Omega) < \infty$

$\mu << dx$

$\mu = \rho \cdot dx, \quad 0 \le \rho \le C_2$

$I_3 \to 0$, т.к.:

$|I_3| \le \sup u \cdot \sup |\nabla u| \cdot \int |\nabla \tilde{\varphi}_n|$.

$\int_\Omega |\nabla \tilde{\varphi}_n| \to 0$ - вычисление

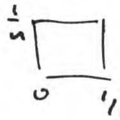
? $\rho \geq c_1 > 0$

$\omega \subset\subset \Omega$ – открытое. Докажем: $\forall u \in C_0^\infty(\Omega)$, т.ч. $u = 1$ на ω, $\Rightarrow \int_\Omega u^2 d\mu \geq c_1|\omega|$

По секвенциальному def Γ-сходимости $\exists\, u_n \xrightarrow[L^2]{} u$: $\lim_n F_n(u_n) = F_\mu(u)$

$\Rightarrow$? $\lim_n \begin{cases} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \int_\Omega u_n^2 \, d\infty_{E_n} \\ +\infty, \text{ если } u_n \notin H_0^1(\Omega) \end{cases} \geq c_1|\omega| \Rightarrow u_n = 0$ q.e. на E_n, $u_n \in H_0^1(\Omega \setminus E_n)$

$\{Q_{n,m}\}_{m=1}^{M_n} = \{$ квадраты вида $(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}) + [0, \frac{1}{n}]^2$, $k, l \in \mathbb{Z}$, лежащие в $\omega \}$

$\square_n =$ 

; $\tau_m : \square_n \to Q_{n,m}$ – биективный сдвиг

Знаем: $\int_{\bigcup_m Q_{n,m}} (u_n - 1)^2 dx = \varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ? $\int_{\bigcup_m Q_{n,m}} |\nabla u_n|^2 dx \geq c_1 |\omega|$

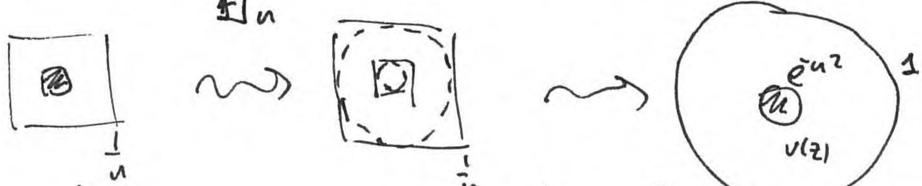
$\tilde{u}(z) = \dfrac{\sum_{m=1}^{M_n} u_n(\tau_m z)}{M_n}$; $M_n \sim |\omega| \cdot n^2$

Дано: $\begin{cases} \tilde{u}(z) = 0 \text{ в } \end{cases}$ 

$\leftarrow \frac{1}{n} \cdot e^{-n^2}$

$\int_{\square_n} (1 - \tilde{u})^2 dx \leq \dfrac{\varepsilon_n}{n^2 \cdot |\omega|}$

? $\int_{\square_n} |\nabla \tilde{u}|^2 dx \geq \dfrac{c}{n^2}$



$v(z) = v(|z|) = g(|z|)$

$\begin{cases} g(e^{-n^2}) = 0 \\ \int_{e^{-n^2}}^1 (1-g)^2 \cdot z \leq \ldots \\ ? \int_{e^{-n^2}}^1 g'^2 \cdot z \geq \ldots \end{cases}$

$\int_{e^{-n^2}}^1 z \cdot g'^2(z) \geq \Big(\underbrace{\int g'}_{\geq \frac{1}{2}}\Big)^2 \cdot \Big(\underbrace{\int_{e^{-n^2}}^1 \frac{1}{z}}_{n^2}\Big)^{-1}$; $\boxed{\varepsilon_n < \frac{1}{2}|\omega|}$

Зам. Бывает так, что $\Gamma\text{-}\lim(u) = \int_\Omega f(\nabla u)\, dx$ (напр., в гомогенизации, если нет зависимости от u $f(u, \nabla u)$)

Тогда: чтобы найти f, достаточно брать $u_\xi(x) = \langle x, \xi \rangle$

$F(u, \Omega) = \int_\Omega f(\nabla u)\, dx$ аксиоматизируется: зависит от Ω как мера
выпукло по u, полунепр. снизу
инвариантно отн. переноса
локально (зависит от $u|_\Omega$)
$F(u + c, \Omega) = F(u, \Omega)$
$0 \leq F(u, \Omega) \leq \int_\Omega (a + b|\nabla u|^p)\, dx$

без Th о на Г-компактности M_0: $\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega). & 1.\ \forall u_n \xrightarrow[L^2]{} u \quad \underline{\lim}_n \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 + C\int u^2 dx \\ & u_n \in H_0^1(\Omega \setminus E_n) \\ & 2.\ \forall u \in H_0^1(\Omega)\ \exists u_n \xrightarrow[L^2]{} u,\ u_n \in H_0^1(\Omega\setminus E_n) \\ & \overline{\lim}_n \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + C \cdot \int_\Omega u^2 dx \end{cases}$

Пр (Braides, 13.1, p. 173) $N \geq 3$. $\delta \cdot \mathbb{Z}^N$; $i \in \mathbb{Z}^N$, $B_i^\delta = B(i \cdot \delta, \delta^{N/N-2})$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ - огр. откр; $|\partial\Omega| = 0$

$$F_\delta(u) = \begin{cases} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, & \text{если } u = 0 \text{ п.в. на } \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (B_i^\delta \cap \Omega),\ u \in H^1(\Omega) \\ +\infty, & u \in L^2(\Omega) \text{ иначе} \end{cases}$$

$$F(u) = \begin{cases} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + C \int_\Omega u^2 dx, & u \in H^1(\Omega) \\ +\infty, & u \in L^2(\Omega) \setminus H^1(\Omega) \end{cases}$$

$$C = \text{ёмкость} = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx : v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N),\ v = 1 \text{ п.в. на } B(0,1) \right\} \in (0, +\infty)$$

Th $F_\delta \xrightarrow{\delta} F$ в $L^2(\Omega)$ в сильной топологии.

Идея д-ва: $B(i\cdot\delta, \delta^{N/N-2})$ $\quad B(i\delta, 2R\cdot\delta^{N/N-2}) \setminus B(i\delta, R\delta^{N/N-2}) = A_{i,\delta}$

по $u \in H^1$ мы w: $w = u$ вне $\bigcup_i A_{i,\delta}$, $w(i\delta + \frac{3}{2} R \delta^{N/N-2} \cdot e) =$ ($|e| = 1$)

$= \text{const} = \fint_{A_{i,\delta}} u$; $\quad \int_\Omega \left| |\nabla w|^2 - |\nabla u|^2 \right| dx = \underset{R\to\infty}{o(1)}$

$w \underset{L^2}{\approx} u$

Сл-е

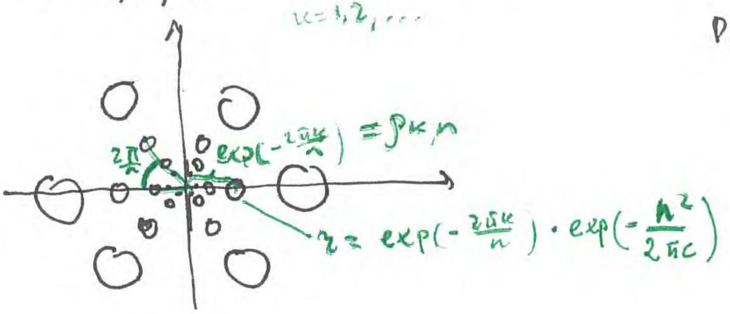
$$\tilde F_\delta(u) = \begin{cases} F_\delta(u) + \int_\Omega fu\, dx, & u \in H_0^1(\Omega) \\ +\infty, & u \in L^2(\Omega) \setminus H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad f \in L^2(\mathbb{R})$$

Г-сходится к $\tilde F(u) = \begin{cases} F(u) + \int_\Omega fu\, dx, & u \in H_0^1(\Omega) \\ +\infty, & u \in L^2(\Omega) \setminus H_0^1(\Omega) \end{cases}$

Краевое условие - как раньше; довесок - в силу аддитивных свойств Г-предела.

Dal Maso, Mosco, Wiener criterion & Γ-convergence

$n = 1, 2, \ldots$



Расстояние между соседними дырками $\doteq \rho_{k,n} \cdot \frac{2\pi}{n}$

$$\Omega := B_{\mathbb{R}^2}(0, 2)$$

$$E_n := \cup \bullet$$

$$\begin{cases} -\Delta u_n = 0 \text{ в } \Omega \setminus E_n \\ u_n = g \text{ на } \partial B_{\mathbb{R}^2}(0,2) \\ \left[\begin{array}{l} u_n = 0 \text{ на } \partial E_n \\ u_n = 0 \text{ в } E_n \end{array} \right. \end{cases}$$

Зам. $0 \in \partial(\Omega \setminus E_n)$ – регулярная точка в смысле критерия Винера
$\Rightarrow u_n$ непрерывна в нуле.

Замена переменной: $x = \log|z|$, $y = \arg z$ $\rightsquigarrow$ периодическая перфорация в полуплоскости.

$$\Rightarrow u_n \xrightarrow[H^1(\Omega)]{} u : \begin{cases} -\Delta u + \cancel{c} \, q(z) u = 0 \text{ в } \Omega \\ u = g \text{ на } \partial\Omega \end{cases}, \quad q(z) = \begin{cases} \frac{1}{|z|^2}, & |z| \le 1 \\ 1, & |z| \ge 1 \end{cases}$$

? u – непрерывна в нуле?

u – непрерывна в нуле ; $u(0) = 0$; $\lim_n u_n(z_n) = 0 \ \forall z_n \to 0$

– какая-то оценка Мазьи. (количественная форма критерия Винера)

Dal Maso, Mosco: Cap_μ: $\rightsquigarrow \int_\Omega |Du|^2 dx + \int_\Omega u^2 d\mu$

Аддитивные свойства.

Сходимость минимайзеров.

Сходимость минимайзеров

<u>Утв.</u> Пусть $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$. Пусть $\exists\, x_n \in \{\arg\min F_n\} \neq \emptyset\ \forall n$; пусть $x_n \xrightarrow[X]{} x_0$.
X – $\forall$ т.п.
Тогда $x_0 \in \arg\min F$.

<u>Д-во</u> ? $\Gamma\text{-}\lim F_n(x_0) \le \Gamma\text{-}\underline{\lim}_n F_n(x')$ $\forall x' \in X$

$$\Gamma\text{-}\overline{\lim_n} = \sup_{U \in \mathcal{N}(x_0)} \overline{\lim_n} \inf_{y \in U} F_n(y) \overset{?}{\le} \overline{\lim_n} \inf_X F_n$$

! $\forall U \in \mathcal{N}(x_0)$ $\overline{\lim_n} \inf_{y\in U} F_n(y) \le \overline{\lim_n} \inf_X F_n$

$x_n \to x \Rightarrow \exists N: \forall n > N$ $x_n \in U$, $\inf_U F_n = F_n(x_n) \Rightarrow$ хорошо.

$$\Gamma\text{-}\underline{\lim_n} F_n(x') = \sup_{U \in \mathcal{N}(x')} \underline{\lim_n} \inf_{y \in U} F_n(y)$$

$\forall U \in \mathcal{N}(x')$ $\underline{\lim_n} \inf_{y\in U} F_n(y) \ge \underline{\lim_n} \inf_X F_n$ $\Big|\Rightarrow$ ∎

<u>Зам.</u> $F(x_0) = \underline{\lim_n} F_n = \overline{\lim_n} F_n$.

<u>Опр</u> $\{F_n\}$ равностепенно коэрцитивно на X, если $\forall t \in \mathbb{R}\ \exists$ замкнутое счётно-компактное $K_t \subset X$ т.ч. $\{F_n \le t\} \subset K_t\ \forall n$.

X – метрическое пр-во
K_t – комп.

X – $\forall$. K – сч. комп., если $\forall$ посл-ть в K имеет точку прикосновения в K (cluster point)
x – cluster point посл-ти $\{x_n\}$, если $\forall U \in \mathcal{N}(x)$ $\forall N\ \exists n > N: x_n \in U$.
$\neq$ частичный lim:
$\{n^{1/10} e_n\}$, e_n – ОНБ в гильбертовом пр-ве.
0 – cluster point

<u>Утв.</u> $\{F_n\}$ – равностепенно коэрцитивно $\Leftrightarrow$ $\exists$ полунепрерывная снизу $\Psi: X \to \overline{\mathbb{R}}$ коэрцитивная, $F_n \ge \Psi$ $\forall n$.

<u>Th</u> Пусть $\{F_n\}$ - экви коэрцитивно, $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$. Тогда F – коэрцитивна, [полунепр. снизу]

$$\min_X F = \exists \lim_n \inf_X F_n$$

<u>Th</u> Пусть $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$, F_n – эквикоэрцитивны. Пусть $x_n \in \{\arg\min F_n\} \neq \emptyset$ $\forall n$; пусть $\arg\min F$ единственный $= x_0$. Тогда $x_n \to x_0$.

Сходимость минимайзеров, продолжение

$\{F_n\}$ - эквикоэрцитивны, $\xrightarrow{\Gamma} F$

$\underbrace{\{\arg\min F\}}_{M(F)} \neq \{\cdot\}$; $\neq \emptyset$ F_n может не достигать min.

$\varepsilon_n \to 0$

$$M_{\varepsilon_n}(F) = \begin{cases} \{F_n < \inf F_n + \varepsilon_n\}, & \inf F_n > -\infty \\ \{F_n < -\frac{1}{\varepsilon_n}\}, & \inf F_n = -\infty. \end{cases}$$

"$M_{\varepsilon_n}(F_n) \xrightarrow{K} M(F)$"

K - сходимость Куратовского (топологическая)

$E_n \subset X$;   [illegible]

$K\text{-}\overline{\lim_n} E_n \subset X$ $x \in K\text{-}\overline{\lim} E_n$, если: $\forall U \in \mathcal{N}(x)\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N: E_n \cap U \neq \emptyset$

$K\text{-}\underline{\lim_n} E_n \subset X$ $x \in K\text{-}\underline{\lim} E_n$ $\forall U\ \exists N: \forall n > N\ E_n \cap U \neq \emptyset$

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 0, & x \in E \\ +\infty, & x \in X \setminus E \end{cases}$$

Утв. $E_n \xrightarrow{K} E \iff \chi_{E_n} \xrightarrow{\Gamma} \chi_E$.

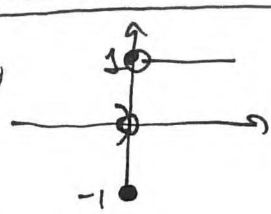
$\mathrm{epi}(F) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : F(x) \le t\}$.

Утв. $F_n \xrightarrow{\Gamma} F \iff \mathrm{epi}(F_n) \xrightarrow{K} \mathrm{epi}(F)$ в $X \times \mathbb{R}$.

Поэтому Γ-сходимость иногда называют epi-convergence.

Аддитивные свойства Γ-сходимости

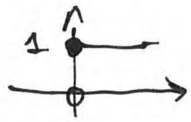
Пример (в $\mathbb{R}$) $F_n = F =$



$\lim\limits_{n\to\infty} F = sc^- F$

$F \neq F_n$

$G_n = G =$



$\Gamma\text{-}\underline{\lim}\, F_n + \Gamma\text{-}\underline{\lim}\, G_n \le \Gamma\text{-}\underline{\lim}\,(F_n + G_n)$ — всегда! для $\Gamma\text{-}\overline{\lim}$, $\Gamma\text{-}\underline{\lim}$

Или: $\operatorname{sgn}(nx) + (-\operatorname{sgn}(nx))$

Утв. Пусть G_n непрерывно сходится к ф-ии G, F_n — $\forall$. Тогда

$$\Gamma\text{-}\overline{\lim_n}\,(F_n + G_n) = (\Gamma\text{-}\overline{\lim_n}\, F_n) + G$$

$\Gamma\text{-}\underline{\lim_n}$ — " —

Опр. G_n непрерывно сходится к G, если: $\forall x \in X$ $\forall V$-окрестности (·) $G(x)$ в $\mathbb{R}$ $\exists\, U \in \mathcal{N}_X(x)$: $G_n(y) \in V$ $\forall y \in U$ и для достаточно больших n.

Зам. Это $\Leftrightarrow$ $G_n \xrightarrow{\Gamma} G$, $-G_n \xrightarrow{\Gamma} -G$

Частные случаи

1. $G_n = G \in C(X)$
2. $G \in C(X)$, $G_n \rightrightarrows G$

Relaxed Dirichlet problems.

Relaxed Dirichlet problems

Висит: ? $-\Delta u + \mu u = f$ $\quad \|\nabla u\|^2_{L^2} + \int u^2 d\mu < \infty$; $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx < \infty$ - надо $\Rightarrow u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mu)$

уточнённая

Оп. $\mu \in \mathcal{M}_0$. $\operatorname{Reg}(\mu) = \bigcup \mathcal{U}$

A_μ, Ω_μ $\quad \mathcal{U}$ - тонко открытое, $\mu(\mathcal{U}) < \infty$

Зам. Пусть $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mu)$; $u = u_{\text{уточнённая}}$, т.е. квазинепр.

Тогда $u = 0$ q.e. в $\mathbb{R}^N \setminus \operatorname{Reg} \mu$

Д-во u тонко непр. в q.e. $x \in \mathbb{R}^N \setminus \operatorname{Reg}\mu$.

x_0 - такая, $u(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\ \mathcal{U}$ - тонкая окрестность x_0, $u|_{\mathcal{U}} \geq \varepsilon > 0$

$\int_{\mathcal{U}} u^2 d\mu < \infty \Rightarrow \mu(\mathcal{U}) < \infty \Rightarrow x_0 \in \operatorname{Reg}\mu$. ∎

Далее рассм. меры μ, т.ч. $|\operatorname{Reg}\mu| < \infty$

Утв. A - квазиоткр., $|A| < \infty$. $\exists\ C(|A|, N)$: $\int_A u^2 dx \leq C(|A|, N) \cdot \int_A |\nabla u|^2 dx$

$\forall u \in H^1_0(A)$. Еще: вложение $H^1_0(A) \hookrightarrow L^2(A)$ - комп.

$f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ (или $\in L^2(\operatorname{Reg}\mu)$)

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 d\mu - 2\int_{\mathbb{R}^N} fu\, dx \qquad \Big[\ ?\ \int |\nabla u|^2 + \int u^2 d\mu - \varepsilon \int u^2 - \tfrac{1}{\varepsilon}\|f\|^2_{L^2}$$

Опр. u - weak variational solution для $\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f \\ f \in L^2(\mu) \end{cases}$, если

$u = \operatorname{arg\,min}_{L^2(\mathbb{R}^N)} G$, $\quad G \rightsquigarrow G + \chi_{H^1(\mathbb{R}^N)}$

Зам. 1. u существует, !. Это не надо доказывать! Через тонкие св-ва ф-й.

2. $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mu)$ $\quad \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} uv\, d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} fv\, dx = 0$

Утв. (принцип максимума) $f \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$.

Д-во $u \rightsquigarrow \max(u, 0)$ уменьшит G. ∎

Если u_n - минимизирующая, то можно считать, что $u_n \xrightarrow[H^1]{} \circ$, т.к. G - выпуклый. Но тогда по Т. о поточечной сх-ти квазивсюду и по Л. Фату

Утв. $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C(|\operatorname{Reg}(\mu)|) \cdot \|f\|_{L^2}$.

Положим $u = R_\mu f$, $\quad R_\mu: L^2(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N)$

$H^1_0(\operatorname{Reg}\mu)$

Зам. A - откр., $|A| < \infty$. $\mu = \infty_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega}$. Тогда: $\begin{cases} -\Delta u = f \text{ в } A \\ u \in H^1_0(\Omega)\ (u = 0 \text{ q.e. вне } A) \end{cases}$

Зам. Можно брать ф-л: $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 d\mu - 2\int_{\mathbb{R}^N} fu\, dx + \chi_{H^1_0(\Omega)}(u)$, Ω - ~~огр.~~ откр

$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f \\ u \in H^1_0(\Omega) \cap L^2(\mu) \end{cases}$; в ур-нии Эйлера $v \in H^1_0(\Omega) \cap L^2(\mu)$

$\mu \rightsquigarrow \mu + \infty_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega}$

Relaxed Dirichlet problems, продолжение

Зам. μ-мера Радона, то слабое вариац. решение $\Leftrightarrow$ классич.
$\Leftrightarrow$ реш. distributional solution, т.е.: в ур-нии Эйлера - $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$
μ-нет Радона - тогда $\not\Leftrightarrow$

Роль $R_\mu(1) = w_\mu$

$w_\mu = R_\mu(1)$, если $|\operatorname{Reg}\mu| < \infty$. $(R_\mu(\mathbb{1}_{\operatorname{Reg}\mu}))$

Утв.: $\operatorname{Reg}\mu = \{w_\mu > 0\}$ q.e.; (нам хватит a.e. ("сильный принцип мах"))
- если $\operatorname{Reg}\mu$ - огр. $\supset$ - уже было ($w_\mu \in L^2(\mu)$)

w_μ задаёт $\mu \in \mathcal{M}_0$ $\quad \mu = \frac{\Delta w + 1}{w}$

Dal Maso, Murat '97 $\quad \mu \rightsquigarrow w_\mu$. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - огр.

$w_\mu = w_{\mu,\Omega}$. $\quad w_\mu = \arg\min \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^2 d\mu + \chi_{H_0^1(\Omega)}(u) - 2\int_\Omega u$

$\mathcal{K}(\Omega) := \{w \in H_0^1(\Omega) : w \geq 0$ q.e.; $\Delta w + 1 \geq 0$ в $\mathcal{D}'$, т.е. мера $\}$ $[\subset L^\infty(\Omega)]$
"$= \mu \cdot w_\mu$"

$\mathcal{K}(\Omega)$ слабо компактно в $H_0^1(\Omega)$

Th $\forall w \in \mathcal{K}(\Omega)$ $\exists! \mu \in \mathcal{M}_0(\Omega)$; при этом $\mu(B) = \begin{cases} \int_B \frac{d\nu}{w}, & \nu = \Delta w + 1, \text{ если } \operatorname{Cap}(B \cap \{w=0\}) \text{ [illegible]} \\ +\infty, & \operatorname{Cap}(B \cap \{w=0\}) > 0 \end{cases}$
$B \subset \Omega$ - борелевские

Сл-е. $\operatorname{Reg}\mu \subset \{w_\mu > 0\}$ q.e. "Строгий принцип максимума"

Д-во Пусть $E \subset \{w_\mu = 0\} \cap \operatorname{Reg}\mu$, ~~$|E| > 0$~~. $\operatorname{cap} E > 0$.
$\forall x \in E$ $\quad x \in \operatorname{Reg}\mu \Rightarrow \exists U_x$ - тонко открытое; $\mu(U_x) < \infty$
$x \in U_x$
$\mu(U_x) < \infty \Rightarrow \operatorname{Cap}(U_x \cap \{w=0\}) = 0$. $\Rightarrow \operatorname{Cap}(U_x \cap E) = 0$.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \cup$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ E$
~~$\Rightarrow |U_x \cap E| = 0$~~. $\Rightarrow$ ~~$E \subset U_x^{(c)}$ п.в.~~
$\Rightarrow$ E разрежено в x. (т.к. $\operatorname{Cap}(U_x \cap E) = 0$, $U_x \cap E$ разрежено везде
$\mathbb{R}^n \setminus U_x$ разрежено в x, т.к. U_x - тонкая окрестность x)

Th Картана $\quad E \cap \{$точки разреженности $E\}$ - нулевой ёмкости.

$\Rightarrow \operatorname{Cap} E = 0$. ∎

Th (Dal Maso, Murat) TFAE: a. $w_{\mu_n,\Omega} \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} \cdot$ $\quad \begin{pmatrix} \Delta \rightsquigarrow A \\ 2 \to p \end{pmatrix}$
b. $\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^2 d\mu_n \xrightarrow{\Gamma} \cdot$

- тогда по Th о сходимости минимайзеров R_{μ_n} сходятся сильно поточечно.
Но Букур доказал больше: $R_{A_n} \xrightarrow[\|\cdot\|_{L^2 \to L^2}]{} \cdot$ (для множеств)

Висич: введение и Appendix

Висит (Appendix)   // $A \rightsquigarrow \infty_{\mathbb{R}^N \setminus A}$

Цель: Th 2.1 Пусть $\{A_n\}$ – квазиоткрытые, $\sup_n |A_n| < \infty$

$$w_{A_n}: \quad \begin{cases} -\Delta w_{A_n} = 1 \text{ в } A_n \\ w_{A_n} \in H^1_0(A_n) \end{cases} ; \; w_{A_n} = R_{A_n}(1)$$

Предположим, что $w_{A_n} \xrightarrow[L^2(\mathbb{R}^N)]{} w$.

Тогда: $\forall \{u_n\}: u_n \in H^1_0(A_n)$, если $u_n \xrightarrow{H^1(\mathbb{R}^N)} u$, то $u_n \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^N)} u$.

Или: вложение $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H^1_0(A_n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ – компактно.

Утв. $\exists\, C = C(|A|): \quad \|u\|_{L^2(A)} \le \|\nabla u\|_{L^2(A)} \cdot C \quad \forall u \in H^1_0(A)$

// $e^{i\langle \cdot, \xi\rangle} \in L^2(A)$ и огр. //

Сл-е (Лемма 3.1): $\|w_A\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \le M = M(|A|)$

Д-во
$$\int_A |\nabla w_A|^2 dx = \int_A w_A \le |A|^{\frac12} \cdot \|w_A\|_{L^2} \le C(|A|) \cdot |A|^{\frac12} \cdot \|\nabla w_A\|_{L^2}$$

$\Rightarrow \|\nabla w_A\|_{L^2}$ ограничена, $\|w_A\|_{L^2}$ – тоже. ∎

Опр по Висит'у: $A_n \xrightarrow{\gamma} \mu$, если $\infty_{\mathbb{R}^N \setminus A_n} \xrightarrow{\gamma} \mu$ в смысле Dal Maso
квазиоткр.

т.е.: $\forall$ огр. Ω $\quad F_n(u,\Omega) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \chi_{H^1_0(\Omega \cap A_n)}(u)$

$\chi_E(x) = \begin{cases} 0, x \in E \\ +\infty, \text{иначе} \end{cases}$ – характеристическая ф-я.

$\mathbb{1}$ – индикатор

Γ-сходится к $F(u,\Omega)$:

$$F(u,\Omega) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 d\mu + \chi_{H^1_0(\Omega)}(u)$$

в $L^2(\Omega)$ (сильной или слабой топологии)

В Th 2.1. можно считать, что $A_n \xrightarrow{\gamma} \mu$ (по Th из Dal Maso)

Ещё: $w_{A_n} \xrightarrow[L^2]{} w$

Зам. $\underbrace{A_n \xrightarrow{\gamma} \mu \text{ получается верно, если } w_{A_n} \xrightarrow{L^2} \cdot}_{}$ – доказано Висит'ом. Кроме того, $R_{A_n} \xrightarrow[\|\cdot\|_{L^2 \to L^2}]{} R_\mu$

Видимо, не хватает следующего: если $w = w_\mu$, то μ восстанавливается по w
$(|\{w>0\}|, |\operatorname{supp}\mu| < \infty)$.

Верно в ограниченном "боксе" [Dal Maso, Murat]
В общем случае – видимо, надо перебирать всё д-во Dal Maso, Murat'a

$$G_n(u) = \int_n^{n+1} u'^2\,dx + \chi_{H_0^1([n,n+1])}(u) - 2\int_n^{n+1} u\,dx$$

Сходимость двух посл-тей в $L^2(\mathbb{R})$

— было выдано в качестве упражнение

$$F_n = G_n + 2\int_{\mathbb{R}} u$$

$\Gamma_w\text{-}\lim F_n(u) =$ a. $u=0 \Rightarrow \Gamma_w\text{-}\lim = 0$

b. $u \neq 0 \Rightarrow \Gamma_w\text{-}\lim = +\infty$

(Предл. 3.10 $F(u) \geq \Psi(u)$, $\|u\|_{L^2} \to \infty \Rightarrow \Psi(u) \to \infty$)

$\Gamma_s\text{-}\lim F_n \geq \Gamma_w\text{-}\lim F_n$; $u = 0 \Rightarrow \Gamma_s\text{-}\lim = 0$

$u \neq 0 \Rightarrow \Gamma_s\text{-}\lim = +\infty$

поточечный lim

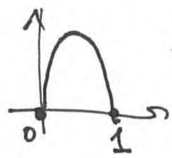
$\Gamma_w\text{-}\lim G_n(u) =$ a. $u = 0$ $\forall\, \mathcal{U}_w(0)$

$\tau_n V \in \mathcal{U}_w\ \forall n \gg 1$

$\inf_{\mathcal{U}_w} G_n = C$

$\tau_n V = \arg\min G_n \rightharpoonup 0$

$\Gamma_w\text{-}\lim G_n(0) = C$



$\frac{t(1-t)}{2} = V$

$-V'' = 1$

$C = \int_0^1 V'^2 - 2\int_0^1 V < 0$

b. $u \neq 0$. $\exists\, \mathcal{U}_w(u)$: $\inf_{\mathcal{U}_w} G_n = \infty\ \forall n \gg 1$

$\Gamma_w\text{-}\lim_n G_n(u) = +\infty,\ u \neq 0$

$\Gamma_s\text{-}\lim G_n(u) =$ a. $u = 0$ пользуемся секв. def.

$u_n \xrightarrow{L^2_s} 0$ $\quad \underline{\lim}\, G_n(u_n) \geq 0$

$\exists\, u_n \to 0,\ u_n = 0$: $\lim G_n(u_n) = 0$

$\Gamma_s\text{-}\lim G_n(0) = 0$

b. $u \neq 0$ $\forall u_n \xrightarrow{L^2} u$ $\Gamma_s\text{-}\lim G_n(u) = +\infty$

Зам. $-2\int_n^{n+1} u \longrightarrow 0$ непрерывно в Γ-сильной топ. [$u_n \xrightarrow{L^2} u \Rightarrow \int_n^{n+1} u_n \to 0$]

$[n, n+1] \xrightarrow{\gamma} \emptyset$; $G_n(u) \xrightarrow{\Gamma} F(u) - 2\int_\emptyset u$

Упражнение не даёт контрпримера к R 5.4, если $w_{An} \not\xrightarrow{L^2} 0$

Вынос (Appendix)

Пусть $A_n \xrightarrow{\gamma} \mu \in \mathcal{M}_0$. Положим $\begin{cases} F_n(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \chi_{H^1_0(A_n)}(u) \\ F(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 d\mu \end{cases}$

$\sup|A_n| < \infty$

Предложение 5.3 Пусть $A_n \xrightarrow{\gamma} \mu$. Тогда $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$ в $L^2(\mathbb{R}^N)$ - сильной и $L^2(\mathbb{R}^N)$ - слабой топ.

Д-во $\Gamma_w\text{-}\lim \le \Gamma_s\text{-}\lim$. $\Rightarrow$? $\begin{cases} \Gamma_s\text{-}\overline{\lim}\, F_n \le F \\ \Gamma_w\text{-}\underline{\lim}\, F_n \ge F \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\forall u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ $\begin{cases} \text{если } F(u) < \infty, \text{ то } \exists u_n \xrightarrow[L^2]{} u : F_n(u_n) \to F(u) \\ \text{если } u_n \xrightarrow[L^2]{} u, \text{ то } F(u) \le \underline{\lim}_n F_n(u_n) \end{cases}$ (т.к. $\{F_n\}$ имеют одновременную мажоранту, ~~возрастающую к~~ ...
$F_n(u) \ge \Psi(\|u\|_{L^2})$
$\Psi(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$
$\Psi(t) = c \cdot t^2$, $c = c(\sup_n |A_n|)$)

Докажем второе: считаем, что $\underline{\lim}_n F_n(u_n) < \infty$

$\rho_R = 1$ на $B(0,R)$, 0 вне $B(0,2R)$, $\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$\rho_R \cdot u_n \xrightarrow[L^2]{} \rho_R \cdot u$ $\quad \begin{cases} u_n \in H^1_0(A_n) \\ \lim\sup_n \|\nabla u_n\|_{L^2} < \infty \end{cases}$

$\rho_R u_n \xrightarrow[H^1_0(B(0,2R))]{} \rho_R \cdot u$

$\rho_R u_n \xrightarrow[L^2(B(0,2R))]{} \rho_R \cdot u$ $\quad \underline{\lim}_n F_n(u_n \cdot \rho_R, \Omega) \ge F_\mu(u, \Omega)$

В def γ-сх-ти: $\Omega := B(0, 2R)$.

$\underline{\lim}_n \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n \cdot \rho_R)|^2 dx \ge \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\rho_R \cdot u)|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} (\rho_R \cdot u)^2 d\mu$ (*)

$[u_n \rho_R \in H^1_0(A_n \cap \Omega)]$

$\underline{\lim}_n \int_{\mathbb{R}^N} \rho_R^2 \cdot |\nabla u_n|^2 dx = \underline{\lim}_n \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla(u_n \cdot \rho_R)|^2 - 2 u_n \rho_R \langle \nabla \rho_R, \nabla u_n \rangle - u_n^2 \cdot |\nabla \rho_R|^2 \right) dx =$

$= \underbrace{\underline{\lim}_n \int \left[|\nabla(u_n \cdot \rho_R)|^2 - 2u\rho_R \langle \nabla u, \nabla \rho_R \rangle - u^2 |\nabla \rho_R|^2 \right] dx}_{\ge (*)} \ge$

$\ge \int_{\mathbb{R}^N} \rho_R^2 \cdot |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \cdot \rho_R^2 \, d\mu$ (**)

$\Rightarrow \underline{\lim}_n \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \ge$ (**) $\forall R \Rightarrow$ $\underline{\lim}_n \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \ge F(u)$ □

$\exists u_n \xrightarrow[L^2]{} u$ - аналогично (локализовать на шар, в шаре $\exists$ Recovery sequence, диаг. процесс) ■

Bucur, Appendix

Th. 5.4 A_n - квазиоткр., $\sup_n |A_n| < \infty$, $A_n \xrightarrow{\gamma} \mu$; $w_{A_n} \xrightarrow[L^2(\mathbb{R}^N)]{H^1(\mathbb{R}^N)} w$

Положим $A = \{w > 0\}$.

$$G_n(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |Du|^2 dx + \chi_{H^1_0(A_n)}(u) - 2\int_{A_n} u\,dx$$

Γ-сходится в $L^2(\mathbb{R}^N)$ сильной топологии к

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |Du|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 d\mu - 2\int_A u\,dx$$

Зам. $|A| \le \varliminf_n |A_n|$ — по Th Егорова
$w_{A_n} = 0$ вне A_n

Д-во Надо: $\forall\, u_n \in H^1_0(A_n)$, $\sup_n \|Du_n\|_{L^2(A_n)} < \infty$, $u_n \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^N)} u$, тогда $\int_{A_n} u_n dx \to \int_A u\,dx$

В самом деле, ? $\Gamma\text{-}\varliminf_n G_n(u) \ge G(u)$. $\forall\, u_n \xrightarrow{L^2} u$ $\varliminf_n G_n(u_n) \ge G(u)$.

(можно) $\varliminf_n < \infty \Rightarrow u_n \in H^1_0(A_n)$
$\sup \|Du_n\|_{L^2} < \infty$ - по нер-ву Пуанкаре
— и по предыдущему предложению

Утв. $A \,[= \{w > 0\}] = Reg(\mu)$ q.e.

Д-во "⊂" - ясно: $w_{A_n} \xrightarrow{L^2} w$; $F_n \xrightarrow{L^2\text{-сильно}} F$

$F(w) \le \varliminf_n F_n(w_{A_n}) < +\infty$ по нер-ву Пуанкаре

$\sup_n \|w_{A_n}\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} < +\infty$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} w^2 d\mu < +\infty \Rightarrow w = 0$ q.e. вне $Reg(\mu)$.

"⊃" пусть B - $\forall$ шар $\subset \mathbb{R}^N$. $0 \le w_{A_n \cap D} \le w_{A_n}$

$\sup_n \|w_{A_n \cap D}\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} < \infty \Rightarrow$ считаем, что $w_{A_n \cap D} \xrightarrow{H^1(D)} w_{D,\mu}$

$$\int_D |Du|^2 + \chi_{H^1_0(D \cap A_n)}(u) \xrightarrow[L^2(D)\text{-сильно}]{\Gamma} \int_D |Du|^2 dx + \int_D u^2 d\mu + \chi_{H^1_0(D)}(u)$$ (по опр. γ-сх-ти)

arg min LHS $\xrightarrow[L^2]{}$ arg min RHS $\Rightarrow w_{D,\mu}$ - решение ~~$-\Delta w_{D,\mu} = 1$ в~~

$\xrightarrow{H^1_0(D)}$

$$\begin{cases} -\Delta w_{D,\mu} + \mu w_{D,\mu} = 1 \\ w_{D,\mu} \in H^1_0(D) \cap L^2(D,\mu) \end{cases}$$

$\{w_{D,\mu} > 0\} \overset{q.e.}{=} \supset Reg(\mu) \cap D$ - знаем из огр. теории.

$w \ge w_{D,\mu}$ п.в. к.в. $\quad \cap$ п.в. $\{w > 0\}$

∎

Вицит, appendix

Продолжение д-ва Th 5.4.

$u_n \xrightarrow[L^2]{} u$; $\sup_n F_n(u_n) < \infty \Rightarrow F(u) < \infty$ по опр. Г-сх-ти

$(F_n \xrightarrow[L^2(\mathbb{R}^\nu)\text{-сильно}]{\Gamma} F)$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^\nu} u^2 d\mu < \infty \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^\nu)$, $u=0$ q.e. вне $Reg(\mu) .= \{w>0\} = A$

$$\left| \int_{A_n} u_n\, dx - \int_A u\, dx \right| \le \int_{A_n \cup A} |u_n - u|\, dx \le |A_n \cup A|^{1/2} \cdot \|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^\nu)} \longrightarrow 0 \quad \blacksquare$$

$\overline{A_n \cup A}$

Сл-е $\arg\min G_n \xrightarrow[\cancel{L^2\text{-сильно}}]{} \cancel{\arg\min G}$

$w_{A_n} \xrightarrow[L^2]{} w \Rightarrow w = \arg\min G$

Утв. $H_n(u) := \int_{\mathbb{R}^\nu} |\nabla u|^2 dx + \chi_{H_0^1(A_n)}(u) - 2\int_A u\, dx$ $\quad \begin{cases} -\Delta \tilde{w}_{A_n} = \mathbb{1}_{A \cap A_n} \\ \tilde{w}_{A_n} = 0 \text{ вне } A_n \end{cases}$

$\tilde{w}_{A_n} := \arg\min H_n$.

$H_n \xrightarrow{\Gamma} G$ { L^2-слабой топологии (или сильной) не надо

$\sup_n \|\tilde{w}_{A_n}\|_{L^2} < \infty \Rightarrow \exists\, \tilde{w}_{A_{n_k}} \xrightarrow[L^2]{} \omega \Rightarrow \omega = \arg\min H = w$.

$\Rightarrow \boxed{\tilde{w}_{A_n} \xrightarrow[L^2]{} w}$.

Висич: Th. 2.1; предложение 3.3.
(случай $W_{A_n} \xrightarrow[L^2]{} \cdot$)

Лемма 3.2 Пусть A_n — квазиоткрытые, $\sup\limits_n |A_n| < \infty$; $A_n \xrightarrow{\gamma} \mu$,

$\boxed{\text{Bucur}}$

$w_{A_n} \xrightarrow[L^2]{} w$.

Тогда: $\forall\, v_n \in H^1_0(A_n)$: $v_n \xrightarrow{H^1(\mathbb{R}^N)} v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, то

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n\,dx \to \int_{\mathbb{R}^N} v\,dx .$$

Д-во $A := \{w>0\} = Reg(\mu)$.

Утв. $v \in H^1_0(A)$.

Д-во ρ_R : ρ_R — срез гладкий спуск с $B(0,R)$ на $B(0,2R)$

$\rho_R \cdot v_n \xrightarrow{H^1} \rho_R \cdot v \Rightarrow \xrightarrow{L^2\text{ сильно}}$; а тогда $\rho_R \cdot v \in H^1_0(A)$, как выше. R — $\forall \Rightarrow$ ■

? $\int\limits_{A_n} v_n \to \int\limits_A v$; $\int\limits_A v_n \to \int\limits_A v$ (т.к. $|A|<\infty$)

? $\int\limits_{A_n \setminus A} v_n \to 0$ $\qquad \int\limits_{A_n} (1 - \mathbb{1}_{A_n \cap A})\, v_n \;(=)$ $\qquad \begin{cases} -\Delta w_{A_n} = 1 & \text{в } A_n \\ -\Delta \tilde{w}_{A_n} = \mathbb{1}_{A_n \cap A} \\ w_{A_n},\ \tilde{w}_{A_n} \in H^1_0(A_n) \end{cases}$

$$= \int_{A_n} (\nabla w_{A_n} - \nabla \tilde{w}_{A_n}) \cdot \nabla v_n\,dx \qquad (v_n \in H^1_0(A_n))$$

$\Rightarrow$ достаточно: $\|\nabla w_{A_n} - \nabla \tilde{w}_{A_n}\|^2_{L^2(A_n)} \to 0$

$$\|\nabla w_{A_n} - \nabla \tilde{w}_{A_n}\|^2_{L^2(A_n)} = \int_{A_n} (\nabla w_{A_n} \cdot \nabla w_{A_n} - 2 \nabla w_{A_n} \cdot \nabla \tilde{w}_{A_n} + \nabla \tilde{w}_{A_n} \cdot \nabla \tilde{w}_{A_n})\,dx$$

$$= \int_{A_n} w_{A_n} - 2\int_{A_n} \tilde{w}_{A_n} + \int_{A_n \cap A} \tilde{w}_{A_n} \le \int_{A_n} w_{A_n} - \int_{A_n} \tilde{w}_{A_n}$$

Зам. $\int\limits_{\underbrace{A_n}_{\mathbb{R}^N}} w_{A_n} \to \int\limits_{\mathbb{R}^N} w \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^N} |w_{A_n} - w| \le |A_n \cup A|^{1/2}\, \|w_{A_n} - w\|_{L^2} \to 0$

$\Rightarrow$ достаточно : $\tilde{w}_{A_n} \xrightarrow[L^2]{} w$ (т.к. тогда так же).

Знаем: $\tilde{w}_{A_n} \underset{L^2}{\rightharpoonup} w$. Надо: $\overline{\lim\limits_n}\, \|\tilde{w}_{A_n}\|_{L^2} \le \|w\|_{L^2}$

По принципу max, $\tilde{w}_{A_n} \le w_{A_n}$. $\overline{\lim\limits_n}\, \|\tilde{w}_{A_n}\| \le \overline{\lim\limits_n}\, \|w_{A_n}\| = \|w\|_{L^2}$. ■

Вынуч: д-во Th 2.1

$u_n \in H^1_0(A_n)$, $u_n \xrightarrow{H^1(\mathbb{R}^N)} u$. ? $u_n \xrightarrow[L^2]{} u$?

$$\|u_n - u\|^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{(u_n - u)}(\xi)|^2 d\xi = \int_{|\xi|>R} (1+|\xi|^2)^{-1}(1+|\xi|^2)|\widehat{(u_n-u)}(\xi)|^2 d\xi +$$

$$+ \int_{|\xi|\le R} |\widehat{(u_n-u)}(\xi)|^2 d\xi \le \frac{1}{1+R^2}\|u_n - u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \int_{|\xi|\le R} |\widehat{(u_n-u)}(\xi)|^2 d\xi$$

fix $\varepsilon > 0$; R: $\frac{1}{1+R^2}\cdot \|u_n - u\|^2_{H^1} < \varepsilon/2$ $\forall n$.

$$\widehat{(u_n-u)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{e^{2\pi i \langle \xi, x\rangle}}_{g_\xi(x)} (u_n(x) - u(x))\, dx \qquad u \in H^1_0(A)$$

$$|\ldots| \le |A_n \cup A|^{1/2} \cdot \|u_n - u\|_{L^2} \le C \ne C(n, \xi)$$

$$g_\xi(x)\cdot(u_n(x) - u(x)) \xrightarrow{H^1} 0$$

$$\underbrace{g_\xi \cdot u_n}_{\in H^1_0(A_n)} \xrightarrow{H^1(\mathbb{R}^N)} g_\xi \cdot u \quad \Bigg| \underset{\text{по лемме 3.2}}{\Longrightarrow} \quad \int_{\mathbb{R}^N} g_\xi u_\xi \to \int_{\mathbb{R}^N} g_\xi \cdot u$$

$$\widehat{(u_n-u)}(\xi) \to 0$$

$\Rightarrow$ по Th о мажорированной сходимости ∎

Зам. Th Реллиха и нер-во Пуанкаре для A: $|A| < \infty$ доказываются так же (в L^2)

Васич

Предложение 3.3. Пусть $\{A_n\}$ – квазиоткрытые в $\mathbb{R}^N$, $\sup_n |A_n| < \infty$

Пусть $w_{A_n} \xrightarrow[L^2(\mathbb{R}^N)]{} w$ и $(*)$ $A_n \xrightarrow{\gamma} \mu$.

Тогда $R_{A_n} \xrightarrow[\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N))]{} R_\mu$

Зам. $A_n \xrightarrow{\gamma} \mu$ можно отбросить, т.к.

$$A_n \xrightarrow{\gamma} \mu \Leftarrow w_{A_n} \xrightarrow[L^2]{} w, \quad w = w_\mu, \quad \mu = \frac{\Delta w + 1}{w}$$

т.е. $: R_{A_n}(1) \xrightarrow[L^2]{} \cdot$ $\Rightarrow R_{A_n} \xrightarrow[\mathcal{L}(L^2)]{} \cdot$

Д-во ? $\lim_{n\to\infty} \sup_{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}} \|R_{A_n}(f) - R_\mu(f)\|_{L^2} = 0$

$\Leftrightarrow \forall f_n : \|f_n\|_{L^2} \le 1 \quad \lim_n \|R_{A_n}(f_n) - R_\mu(f_n)\|_{L^2} = 0$

Считаем, что $f_n \xrightarrow[L^2]{} f$.

$$\lim_n \|R_{A_n}(f_n) - R_\mu(f_n)\|_{L^2} \le \lim_n \|R_{A_n}(f_n) - R_\mu(f)\|_{L^2} + \lim_n \|R_\mu f_n - R_\mu f\|_{L^2}$$

II: $f_n \xrightarrow[L^2]{} f \Rightarrow R_\mu(f_n - f) \xrightarrow[H^1_0(\mathrm{Reg}\,\mu)]{} 0$, $|\mathrm{Reg}\,\mu| < \infty$ $\Rightarrow$ II $\to 0$ (т.к. $H^1_0(\mathrm{Reg}\,\mu) \hookrightarrow_{\text{комп.}} L^2(\mathbb{R}^N)$)

$$R_{A_n}(f_n) = \arg\min \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \chi_{H^1_0(A_n)}(u)\right] - 2\int_{\mathbb{R}^N} f_n u \, dx = F_n + L_n$$

$$R_\mu(f) = \arg\min \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 d\mu\right] - 2\int_{\mathbb{R}^N} f u \, dx = F + L$$

Знаем: $F_n \xrightarrow[L^2\text{-сильная}]{\Gamma} F$; $L_n \to L$ непрерывно (т.е. $\pm L_n \xrightarrow[L^2\text{-сильно}]{\Gamma} \pm L$)

т.е. $\forall u_n \to u \quad \int f_n u_n \to \int f u$

? $\forall t \quad \bigcup_n \{F_n + L_n \le t\}$ – предкомп. в $L^2(\mathbb{R}^N)$

$u_m \in$ секвенциально предкомп.

$\sup \|f_n\| < \infty \Rightarrow \exists \tilde{t}:\ u_m \in H^1_0(A_{n(m)})$

$\|\nabla u_m\|_{L^2} \le \tilde{t}$

Но: можно считать, что $u_m \xrightarrow[H^1(\mathbb{R}^N)]{} \cdot$. По Th 2.1. $u_n \xrightarrow{L^2} \cdot$.

$\Rightarrow R_{A_n}(f_n) \xrightarrow[L^2]{} R_\mu(f)$! ∎

Висит: Th.2.2 (другие случаи).

Висит

Th 2.2 Пусть $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — квазиоткрытые, $\sup_n |A_n| < \infty$. С точностью до подпоследовательности верно одно из двух:

(Компактность) $\exists \{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$, $\mu \in \mathcal{M}_0$: $y_n + A_n \xrightarrow{\gamma} \mu$,

$$R_{y_n+A_n} \xrightarrow[\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N))]{} R_\mu$$

(Дихотомия) $\exists$ последовательность квазиоткрытых $\tilde{A}_n \subseteq A_n$ т.ч.

$$\|R_{A_n} - R_{\tilde{A}_n}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N))} \longrightarrow 0$$

$$\tilde{A}_n = A_n^1 \sqcup A_n^2 ; \quad \mathrm{dist}(A_n^1, A_n^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$$\varliminf_n |A_n^1|, \ \varliminf_n |A_n^2| > 0.$$

Д-во. Lions: Concentration-compactness principle (для ф-й).

Th Пусть $\{u_n\}$ ограничена в $H^1(\mathbb{R}^N)$

$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 \, dx \to \lambda \geq 0$. $\exists \{n_k\}$, т.ч. одно из трёх:

(компактность) $\exists \{y_k\} \subset \mathbb{R}^N$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R < \infty$: $\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(y_k, R)} u_{n_k}^2 \, dx < \varepsilon$.

(исчезновение, в т.ч. при $\lambda=0$) $\forall R > 0$ ($<\infty$) $\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,R)} u_{n_k}^2 \, dx = 0$

(дихотомия) $\lambda > 0$; $\exists \alpha \in (0, \lambda)$; $\exists u_k^{(1)}, u_k^{(2)}$:

$$\|u_{n_k} - u_k^{(1)} - u_k^{(2)}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_k^{(1)})^2 dx \longrightarrow \alpha, \qquad \int_{\mathbb{R}^N} (u_k^{(2)})^2 dx \longrightarrow \lambda - \alpha$$

$$\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\, u_k^{(1)}, \mathrm{supp}\, u_k^{(2)}) \longrightarrow \infty$$

$$\varliminf_n \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_{n_k}|^2 - |\nabla u_k^{(1)}|^2 - |\nabla u_k^{(2)}|^2 \right) dx \geq 0$$

Зам. Если убрать $\lim \int (\nabla^2 - \nabla^2 - \nabla^2)$, то достаточно требовать ограниченности $\{u_n\}$ в L^2. Или в L^1 (u_n вместо u_n^2)

$u_n := w_{A_n}$. Огр. в H^1. Если компактность, то $w_{A_{n_k} - y_k} \xrightarrow[L^2]{} \cdot$ — этот случай разобран ранее.

Считаем, что $\|w_{A_n}\|_{L^2}^2 \to \lambda \geq 0$

Висиг, Th 2.2, продолжение.

Пусть "исчезновение". Докажем, что $\overbrace{w_{A_n} \xrightarrow[L^2]{} 0}^{\text{тогда } \mu=0\text{, и доказывали раньше}}$. $\|w_{A_n}\|^2_{L^2} \le \frac{1}{\lambda_1(A_n)} \|\nabla w_{A_n}\|^2_{L^2}$

$\Rightarrow$ достаточно: $\lambda_1(A_n) \to +\infty$.

// Лемма 0: $w_{A_n} \xrightarrow[L^2]{} 0 \Rightarrow$ ... $\Rightarrow A_n \to \infty$ ... $\Rightarrow R_{A_n} \to 0$

Приблизим A_n множеством вида $A_n \cap B(y_n, R)$.

Надо: $\lambda_1(A_n \cap B(y_n,R)) \le \lambda_1(A_n) + \varepsilon$ — $\forall \varepsilon = 1\ \exists R: \forall A_n\ \exists y_n$.

$\forall \varepsilon\ \exists R: \forall E \subset \mathbb{R}^N\ \exists y \in \mathbb{R}^N: \lambda_1(E \cap B(y,R)) \le \lambda_1(E) + \varepsilon$.

Th (Lieb'83) $A, B \subset \mathbb{R}^N$ — непустые, открытые. $N \ge 1$; $\forall \delta > 0$
$\exists x \in \mathbb{R}^N$: $\lambda_1(A \cap (B+x)) \le \lambda(A) + \lambda(B) + \delta$.
Если A, B — огр., то $\exists x$: $\lambda_1(A \cap B) < \lambda(A) + \lambda(B)$

Д-во — легко через отношение Рэлея
Lieb, "On the lowest eigenvalue of the Laplacian for the intersection of domains", 1983

$\lim_n \int_{B(y_n,R)} w_{A_n}^2\, dx = 0$ — по исчезновению

& $w_{A_n \cap B(y_n,R)} \le w_{A_n}$ — по принципу max.

$\Rightarrow \lim_n \int_{\mathbb{R}^N} w^2_{A_n \cap B(y_n,R)}\, dx = 0 \Rightarrow w_{A_n \cap B(y_n,R)} \xrightarrow[L^2]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_{A_n \cap B(y_n,R)} \xrightarrow[\mathcal{L}(L^2)]{} 0 \Rightarrow \lambda_1(A_n \cap B(y_n,R)) \to +\infty$ ■

Пусть дихотомия (для $\{w_{A_n}\}$). $\exists u_n^{(1)}, u_n^{(2)} \dots$

Зам. Можно считать, что $u_n^{(1)}, u_n^{(2)} \in H_0^1(A_n)$ — по построению

$\tilde{A}_n := \{u_n^{(1)} > 0\} \cup \{u_n^{(2)} > 0\} = A_n^1 \sqcup A_n^2$

$\underline{\lim}_n |A_n^1|, \underline{\lim}_n |A_n^2| > 0$, т.к. $\int (u_n^{(1)})^2 \to \underset{0}{\overset{\vee}{\alpha}}$, $\int (u_n^{(2)})^2 \to \underset{0}{\overset{\vee}{\lambda - \alpha}}$, $u_n^{(1)}, u_n^{(2)}$ огр. в $H^1(\mathbb{R}^N)$

Утв. $\|w_{A_n} - w_{\tilde{A}_n}\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \xrightarrow[n]{} 0$

Д-во Зам. $w_{\tilde{A}_n} = \mathrm{pr}_{H_0^1(\tilde{A}_n)} w_{A_n}$ — из гильбертовых соображений.
$\|u\|^2_{H_0^1} = \int |\nabla u|^2\, dx$ $\quad u_n^{(1)} + u_n^{(2)} \in H_0^1(\tilde{A}_n)$, $\operatorname{supp} u_n^{(1)} \not\cap \operatorname{supp} u_n^{(2)}$

$\Rightarrow$

$$\int_{A_n} |\nabla w_{A_n} - \nabla w_{\tilde{A}_n}|^2 dx \le \int_{A_n} |\nabla w_{A_n} - \nabla u_n^{(1)} - \nabla u_n^{(2)}|^2 dx = [\text{раскрыть скобки и по частям}] =$$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}^N} (w_{A_n} - u_n^{(1)} - u_n^{(2)})\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n^{(1)} + \nabla u_n^{(2)}|^2 - |\nabla w_{A_n}|^2 \right) dx = I + II$$

$I \le |A_n|^{1/2} \cdot \|w_{A_n} - u_n^{(1)} - u_n^{(2)}\|_{L^2} \xrightarrow[n]{} 0$, $II \le \to 0$ — по построению ■

Лемма 3.6. $\tilde{A} \subset A \subset \mathbb{R}^N$ – квазиоткрытые, $|A| < \infty$. $\exists K, \alpha$ = зависят от N и $|A|$, т.ч.
$K(|A|, N)$ $\alpha(N)$:

$$\|R_A - R_{\tilde{A}}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \le K \cdot \|w_A - w_{\tilde{A}}\|^{\alpha}_{L^2}$$

Д-во – интерполяция.

<u>Th (Гилбарг, Трудингер)</u> 8.16. $\|R_A f\|_{L^\infty} \le C(p, N, |A|) \cdot \|f\|_{L^p}$, $p > N/2$.

[$N = 2,3$ – можно взять $p = 2$ и легко сделать]

$p > N/2$. ? $\|R_A - R_{\tilde{A}}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^N))}$: $f \ge 0$, $f \in L^p(A) \subset L^2(A)$

$$\int_A |(R_A - R_{\tilde{A}}) f|^p \, dx \le \|(R_A - R_{\tilde{A}}) f\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \cdot \int_A (R_A - R_{\tilde{A}}) f \cdot 1 \, dx =$$

(без модуля по принципу max) $f \ge 0$

$$= C(p, |A|, N) \cdot \|f\|^{p-1}_{L^p(A)} \cdot \int_A f \cdot [(R_A - R_{\tilde{A}})(1)] \, dx \le$$

$$\le C(p, |A|, N) \cdot \|f\|^p_{L^p} \cdot \|w_A - w_{\tilde{A}}\|_{L^{p'}}$$

Для $\forall f$ (не обязательно ≥ 0): $\|R_A - R_{\tilde{A}}\|_{\mathcal{L}(L^p)} \le \underbrace{2C(p, |A|, N)}^{1/p} \cdot \|w_A - w_{\tilde{A}}\|^{1/p}_{L^{p'}}$

$$\|R_A - R_{\tilde{A}}\|_{\mathcal{L}(L^{p'})} \le \text{—''—}$$

$\Rightarrow$ по Th Рисса-Торина, $\|R_A - R_{\tilde{A}}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \le 2C(\ldots) \cdot \|w_A - w_{\tilde{A}}\|^{1/p}_{L^{p'}}$
$\forall p > N/2$.

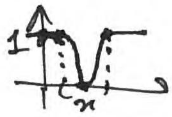
$p' < 2$, $|A| < \infty \Rightarrow$ оценим и через $\|w_A - w_{\tilde{A}}\|_{L^2}$ ∎

Теоремы о достаточном числе возмущений

Теорема о "достаточном числе возмущений"

$F_n \xrightarrow{\Gamma} F$, эквикоэрцитивно, $G \geq 0$ — непр. $\Rightarrow F_n + G \xrightarrow{\Gamma} F+G$ — эквикоэрцитивно

$\inf(F_n+G) \longrightarrow \min(F+G)$

Th Пусть X — вполне регулярное т.п., т.е. $\exists$  .
(e.g., X — метрическое)

$\{F_n\}$ — эквикоэрцитивная посл-ть функционалов, $F_n \geq 0$.

$F : X \to [0, +\infty]$ — LSC. TFAE:

a. $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$

b. $\forall\, G \geq 0$, G - непрерывна $\Rightarrow \inf\limits_X (F+G) = \lim\limits_n \left[\inf\limits_X (F_n+G)\right]$

Зам. Условие (b) можно сильно ослабить.

Опр (X,d) — метрическое, $\alpha, \lambda > 0$.

$$F^{\alpha,\lambda}(x) = \inf_{y \in X} \left[F(y) + \lambda\, d(x,y)^\alpha\right] \qquad \left(\leq F(x)\right)$$

— аппроксимация Moreau - Yosida индекса λ и порядка α.

Зам. Это max миноранта G для F: $|G(x) - G(y)| \leq \lambda \cdot \mathrm{dist}(x,y)^\alpha$

Th (X,d) — метрическое; $\{F_n\}$ — эквикоэрцитивна, F — LSC, α - fix. TFAE:

a. $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$

b. $\forall \lambda > 0, \forall x \in X \quad F^{\alpha,\lambda}(x) \longleftarrow F_n^{\alpha,\lambda}(x)$.

Зам. Можно: x пробегает плотное мн-во, $\lambda = \lambda_j \underset{j \in \mathbb{N}}{\to} \infty$.

Квадратичные формы. $\lambda_0 > 0$; $A_n \geq \lambda_0$, $A_n : H \to H$ - неогр. вообще говоря

$A_n \xrightarrow{G} A$, если $A_n^{-1}\, pr_{\overline{Dom(A_n)}}\, f \rightrightarrows A^{-1}\, pr_{\overline{Dom(A)}}\, f$

$A_n \geq \lambda_0$

"$Q_{A_n} \underset{L^2 - s,w}{\xrightarrow{\Gamma}} Q_A \iff A_n \xrightarrow{G} A \iff A_n + \lambda \xrightarrow{G} A + \lambda \;\; \forall \lambda > 0$"

Th о достаточном числе возмущений, продолжение

Предложение 4.10 (Dal Maso, Mosco): $\mu_n \in \mathcal{M}_0$. $\mu_n \xrightarrow{\gamma} \mu$ (т.е. $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^N$ - откр.

$$F_n(u,\Omega) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega u^2 d\mu_n + \chi_{H_0^1(\Omega)}(u)$$

$$\xrightarrow{\Gamma} F(u,\Omega) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega u^2 d\mu + \chi_{H_0^1(\Omega)}(u)\Big)$$

$\Leftrightarrow \forall f \in L^2(\Omega)$ $\quad \min\left(F_n(u,\Omega) + \int_\Omega fu\, dx\right) \to \min\left(F(u,\Omega) + \int_\Omega fu\, dx\right)$

$\forall \Omega \subset \mathbb{R}^N$ откр.

$\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \forall \lambda \geq 0 \\ \exists \lambda \geq 0 \end{array}\right.$: $\forall \Omega$, $\forall f \in L^2(\Omega)$ решение

задача $\begin{cases} -\Delta u_n + (\mu_n + \lambda) u_n = f & \text{в } \Omega \\ u_n = 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$

сильно сходится в $L^2(\Omega)$ к решению

$$\begin{cases} -\Delta u + (\mu + \lambda) u = f & \text{в } \Omega \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$$